ಎರಡು ಆಯದ ಆಕೃತಿಗಳು

http://arime.org

ಮುನ್ನುಡಿ

ನಾವು ದೈನಂದಿನ ಬದುಕಿನಲ್ಲಿ ಹತ್ತು ಹಲವಾರು ಆಕೃತಿಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ ಇಲ್ಲವೇ ಕಾಣುತ್ತಾ ಇರುತ್ತೇವೆ, ಅವುಗಳು ಎರಡು ಆಯದ (Two Dimensional) ವಸ್ತುಗಳಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಮೂರು ಆಯದ (Three Dimensional) ವಸ್ತುಗಳಾಗಿರಬಹುದು. ಈ ವಸ್ತುಗಳ ಆಕಾರಗಳು ಗೆರೆಯರಿಮೆಗೆ ತಳಕುಹಾಕಿಕೊಂಡಿದೆ, ಕಲಿಕೆಯ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಿಂದಾಗಲಿ ಅಥವಾ ಕುತೂಹಲದಿಂದಾಗಲಿ ಈ ಆಕಾರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯುವುದು ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಲಿವು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಕಳೆದ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅರಿಮೆ ಮಿಂದಾಣದಲ್ಲಿ ಮೂಡಿಬಂದ ಎರಡು ಆಯದ ಆಕೃತಿಗಳ ಆಯ್ದ ಬರಹಗಳನ್ನು ಈ ಮಿನ್ನೋದುಗೆಯಲ್ಲಿ (E-book) ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಹಾಗು ಹೆಚ್ಚು ತಿಳಿಯುವ ಪದಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ತಿಳಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

“ ಬನ್ನಿ, ಅರಿಮೆಯನ್ನು ಕಟ್ಟೋಣ ಮತ್ತು ಕಲಿಯೋಣ ”

- **ಕಿರಣ್ ಮಲೆನಾಡು,**

  ಅರಿಮೆಯ ಬರಹಗಾರ, http://arime.org ಮಿಂಬಾಗಿಲು

ತಿಳಿಸುವಿಕೆ

ಬರಹಗಾರರು: ಕಿರಣ್ ಮಲೆನಾಡು.

ಮುಂಪುಟ ಕಟ್ಟಣೆ: ರತೀಶ ರತ್ನಾಕರ.

ನೆರವು ನೀಡಿದವರು: ಮಲ್ಲೇಶ್ ಬೆಳವಾಡಿ ಗವಿಯಪ್ಪ, ವಿವೇಕ್ ಶಂಕರ್, ಪ್ರಶಾಂತ್ ಸೊರಟೂರ, ಪ್ರಿಯಾಂಕ್ ಭಾರ್ಗವ್.

ಹೊರಹೊಮ್ಮಿಕೆ: 09/23/2017.

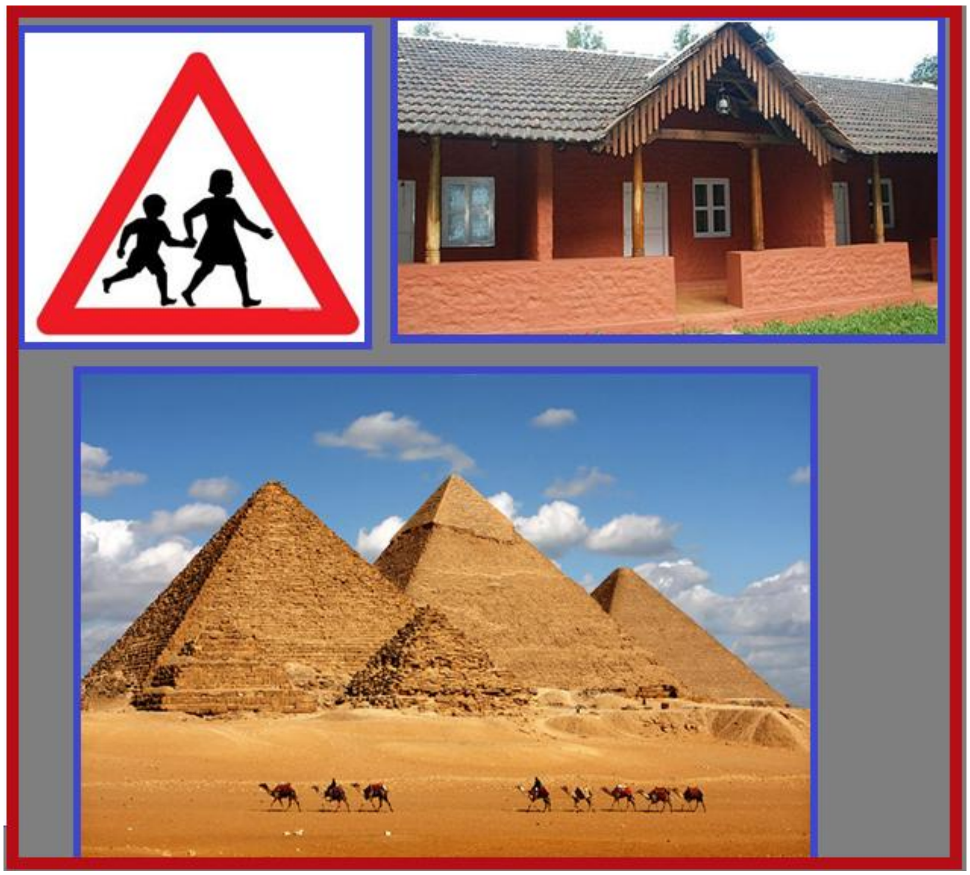
ಮಿಂಬಲೆಯ ವಿಳಾಸ: http://arime.org

ಮಿಂಚೆ: arime.org@gmail.com

ಒಳನೋಟ

1. ಮೂರ್ಬದಿ

ನಾವು ದಿನಾಲೂ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯಾಕಾರವನ್ನು (Triangle Shape) ನೋಡುತ್ತಲೇ ಇರುತ್ತೇವೆ. ಟ್ರಾಪಿಕ್ ಬೋರ್ಡ್ ಗಳಾಗಿರಬಹುದು, ಹಂಚಿನ ಮನೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು, ಹಲವಾರು ಕಡೆ ಮೂರ್ಬದಿ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಪಿರಾಮಿಡ್‌ಗಳೂ ಮೂರ್ಬದಿ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

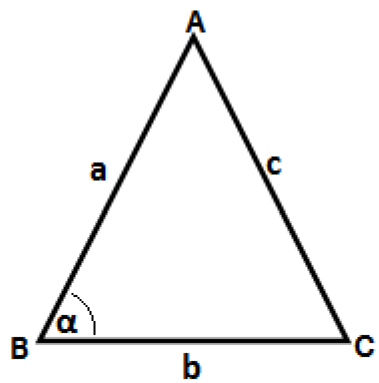


ದಿನಬಳಕೆಯಲ್ಲದೇ ಅರಿವಿನ ಹಲವಾರು ಕವಲುಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗುವ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಈ ಬರಹದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಹೆಸರೇ ಸೂಚಿಸುವಂತೆ,

*ಮೂರು ಬದಿಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ, ಮೂರು ಮೂಲೆಗಳ ಒಂದು ಸಮತಟ್ಟಾದ (planar) ಮುಚ್ಚಿದ ಆಕೃತಿಯೇ **ಮೂರ್ಬದಿ** (triangle).*

ಮೂಲೆಗಳನ್ನು 'ಕೋನ' ಅಂತಾನೂ ಸೂಚಿಸಬಹುದಾದುರಿಂದ ಈ ಆಕೃತಿಯನ್ನು **ಮುಕ್ಕೋನ** (ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ) ಎಂದೂ ಕರೆಯಬಹುದು.



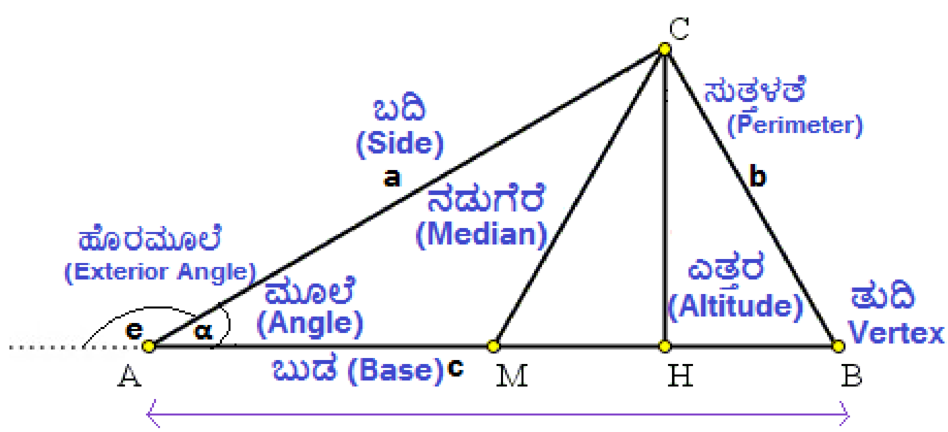
ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ABC ಎಂಬ ಮೂರ್ಬದಿಯು AB, BC ಮತ್ತು CA ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಎರಡು ಬದಿಗಳು ಸೇರಿ ಮೂಲೆ ಇಲ್ಲವೇ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು α ಗುರುತಿನಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಕೋನವನ್ನು ∠ABC ಅಂತಾನೂ ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಕೋನ ಉಂಟಾಗುವ B ತುದಿಯು ಗುರುತಿನ ನಡುವೆ ಬರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಮೂರ್ಬದಿಯ ಮುಖ್ಯ ಭಾಗಗಳು:

ಈಗ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.



- **ಬದಿ (Side):** ಮೂರ್ಬದಿ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಬದಿಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ತುದಿ (Vertex):** ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳು ಸೇರುವೆಡೆಯನ್ನು ತುದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

- **ಮೂಲೆ / ಕೋನ (Angle):** ಎರಡು ಜೋಡಿ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸೇರಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಜಾಗವನ್ನು ಮೂಲೆ ಇಲ್ಲವೇ ಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter):** ಮೂರು ಬದಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದವನ್ನು ಸುತ್ತಳತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ನಡುಗೆರೆ (Median Line):** ಮೂರ್ಬದಿಯ ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ (Vertex) ಅದರ ಎದುರು ಬದಿಯ ನಡುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯನ್ನು ನಡುಗೆರೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ C ತುದಿಯಿಂದ ಅದರ ಎದುರು ಬದಿ AB ಯ ನಡು M ಗೆ ಎಳೆದ CM ಗೆರೆ ಮೂರ್ಬದಿಯ ನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ.
- **ಎತ್ತರ (Altitude / Height):** ಮೂರ್ಬದಿಯ ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ (Vertex) ಅದರ ಎದುರು ಬದಿಗೆ ನೇರಡ್ಡವಾಗಿ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎತ್ತರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ಬುಡ (Base):** ಮೂರ್ಬದಿಯ ಅಡಿಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಬುಡ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

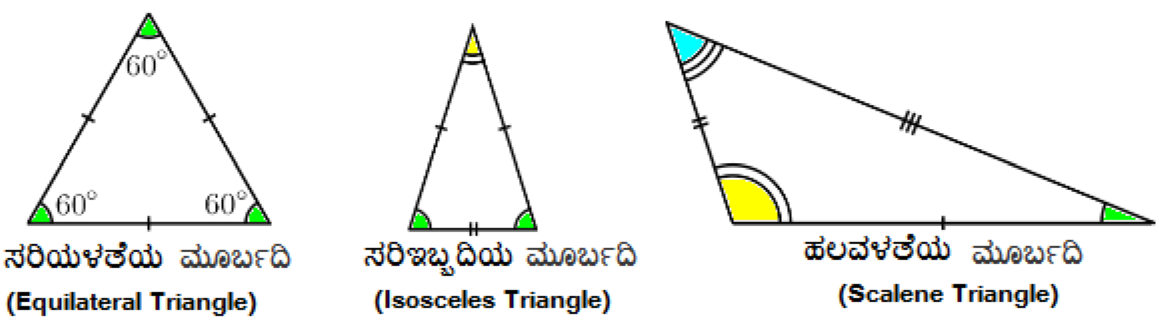
ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬಗೆಗಳು:

ಎಲ್ಲಾ ಮೂರ್ಬದಿ ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿರುವುದಿಲ್ಲ ಕೆಲವೊಂದು ಹೆಚ್ಚು ಮೂಲೆಯಳತೆಯನ್ನು (Angle) ಹೊಂದಿರಬಹುದು, ಕೆಲವೊಂದು ಹೆಚ್ಚು ಬದಿಯಳತೆಯನ್ನು (Length of a side) ಹೊಂದಿರಬಹುದು, ಕೆಲವೊಂದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬದಿಗಳ ಅಳತೆ ಸರಿಯಾಗಿರಬಹುದು, ಕೆಲವೊಂದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಅಳತೆ ಸರಿಯಾಗಿರಬಹುದು. ಹಲವಾರು ಅಳತೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ನಿಮಗೆ ಗೊಂದಲವಾಗಿರಬಹುದು ಅಲ್ಲವೇ?, ಈ ಗೊಂದಲಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬಗೆಹರಿಸೋಣ.

ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಬಗೆಗಳಿವೆ. ಬಗೆಗಳನ್ನು ಬದಿಯ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಮೂಲೆಯಳತೆಯ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು.

1. ಬದಿಯಳತೆಯಂತೆ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬಗೆಗಳು:

ಬದಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಮೂರು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬಗೆಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸಬಹುದು.



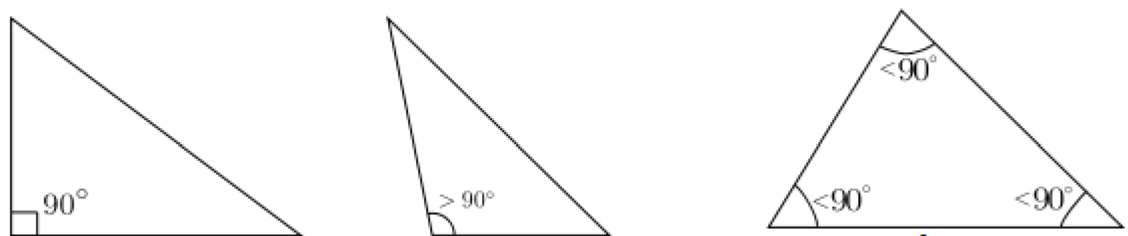
(ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬದಿಯಳತೆ ಮತ್ತು ಮೂಲೆಯಳತೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಬದಿಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಯೊಳಗೆ ಬಣ್ಣಗಳನ್ನು ತುಂಬಲಾಗಿದೆ.)

- **ಸರಿಯಳತೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Equilateral Triangle):** ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದು ಸರಿಯಳತೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳು 60° ಇರುತ್ತವೆ.

- **ಸರಿ-ಇಬ್ಬದಿಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Isosceles Triangle):** ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದು ಸರಿ-ಇಬ್ಬದಿಯ ಮೂರ್ಬದಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- **ಹಲವಳತೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Scalene Triangle):** ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಹಲವಳತೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ ಎನ್ನಬಹುದು, ಇದರಲ್ಲಿ ಮೂಲೆಯಳತೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ.

2. ಮೂಲೆಯಳತೆಯಂತೆ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬಗೆಗಳು:

ಸರಿಮೂಲೆ (Right Angle [90°]) ಅಳತೆಗೋಲನ್ನಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಮೂರು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬಗೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.



ಸರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Right Angle Triangle) ಹಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Obtuse Angle Triangle) ಕಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Acute Angle Traingle)

- **ಸರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Right Angle Triangle):** ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ನೇರಡ್ಡವಾಗಿದ್ದರೆ (Perpendicular to each other) ಅದನ್ನು ಸರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು, ಇದರಲ್ಲಿ ನೇರಡ್ಡವಾದ ಎರಡು ಬದಿಗಳು ಸೇರುವೆಡೆ ಅದರ ಮೂಲೆಯಳತೆ 90° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
- **ಹಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Obtuse Angle Triangle):** ಮೂರ್ಬದಿಯ ಯಾವುದಾರೂ ಎರಡು ಬದಿಗಳು ಸೇರುವೆಡೆ ಮೂಲೆಯಳತೆಯು 90° ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದರೆ ಅದು ಹಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
- **ಕಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Acute Angle Triangle):** ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕೊಂದು ಸೇರುವೆಡೆ ಮೂಲೆಯಳತೆಗಳು 90° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದರೆ ಅದು ಕಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
  ಹಿರಿಮೂಲೆ ಮತ್ತು ಕಿರಿಮೂಲೆ ಮೂರ್ಬದಿಗಳನ್ನುಒಟ್ಟಾಗಿ **ಓರೆಮೂಲೆಗಳ ಮೂರ್ಬದಿ (oblique triangles)** ಅಂತಾ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಮೂರ್ಬದಿಯ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷತೆಗಳು:

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬಗೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಮೂರ್ಬದಿಯ ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

1. ಯಾವುದೇ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ (Interior Angles) ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಹೊರಮೂಲೆಗಳ (Exterior Angles) ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

2. ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯು ಸರಿಮೂಲೆಯಾಗಿದ್ದರೆ (Right Angle) ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳು 90° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವು 90° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

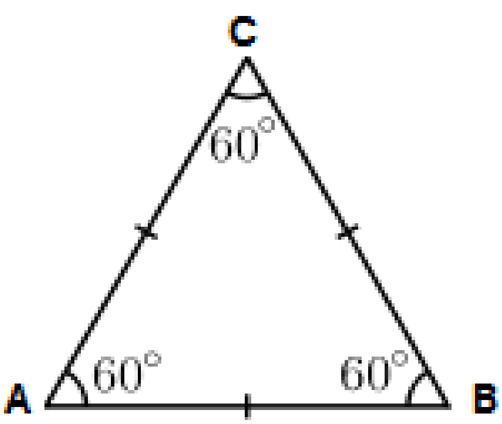
3. ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯು ಸರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Right Angle Triangle) ಮತ್ತು ಸರಿ-ಇಬ್ಬದಿಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Isosceles Triangle) ಎರಡೂ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸರಿಮೂಲೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದೆರಡು ಮೂಲೆಗಳು ತಲಾ 45° ಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

4. ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯು ಸರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯಾಗಿದ್ದರೆ (Right Angle Triangle), ಸರಿಮೂಲೆ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಉದ್ದಬದಿಯ ಇಮ್ಮಡಿಯು (Square of hypotenuse) ಉಳಿದ ಎರಡು ಬದಿಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಇದನ್ನು ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Pythagoras Theorem) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

5. ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿದ್ದರೆ (Congruent) ಆ ಎರಡು ಮೂರ್ಬದಿಗಳು ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತವೆ.ಇದನ್ನು ಬದಿ – ಬದಿ – ಬದಿ ದಿಟಹೇಳಿಕೆ (SSS: Side – Side –Side Postulate) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

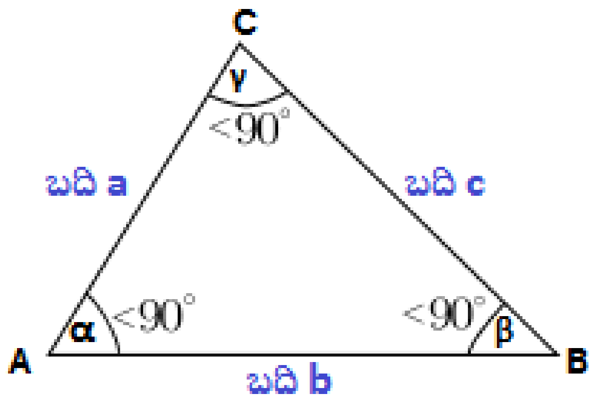
6. ಎರಡು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳು ಸರಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಎರಡು ಮೂರ್ಬದಿಗಳು ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಬದಿ – ಮೂಲೆ – ಬದಿ ದಿಟಹೇಳಿಕೆ (SAS: Side – Angle –Side Postulate) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

7. ಸರಿಯಳತೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯ (Equilateral Triangle) ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳು 60° ಇರುವುದರಿಂದ ಈ ಮೂರ್ಬದಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಕಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Acute Angle Triangle) ಮತ್ತು ಸರಿ-ಇಬ್ಬದಿಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Isosceles Triangle) ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



8. ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯು ಸರಿಮೂಲೆಯನ್ನು (Right Angle) ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದು ಓರೆಮೂಲೆ ಮೂರ್ಬದಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ (Oblique Angle Triangle). ಹಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Obtuse Angle Triangle) ಮತ್ತು ಕಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಗಳು (Acute Angle Triangle) ಸರಿಮೂಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳು ಓರೆಮೂಲೆ ಮೂರ್ಬದಿ ಗುಂಪಿಗೆ ಸೇರುತ್ತದೆ.

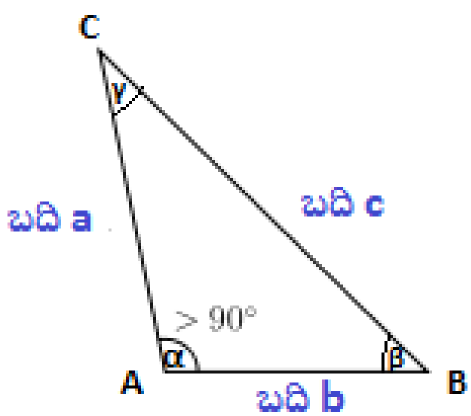
9. ಕಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ (Acute Angle Triangle) ಅದರ ಒಂದು ಬದಿಯ ಇಮ್ಮಡಿಯು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬದಿಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕಿರಿಮೂಲೆಯ ಎದುರುಬದಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಕಿರಿದಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಮೂಲೆಗಳು: $\angle\alpha < 90°$, $\angle\beta < 90°$, $\angle\gamma < 90°$.

ಬದಿಗಳು: $a^2 + b^2 > c^2$, $b^2 + c^2 > a^2$, $c^2 + a^2 > b^2$

10. ಹಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ (Obtuse Angle Triangle) ಹಿರಿಮೂಲೆಯೊಂದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 90° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಹಿರಿಮೂಲೆಯ ಎದುರುಬದಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಉಳಿದ ಬದಿಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.



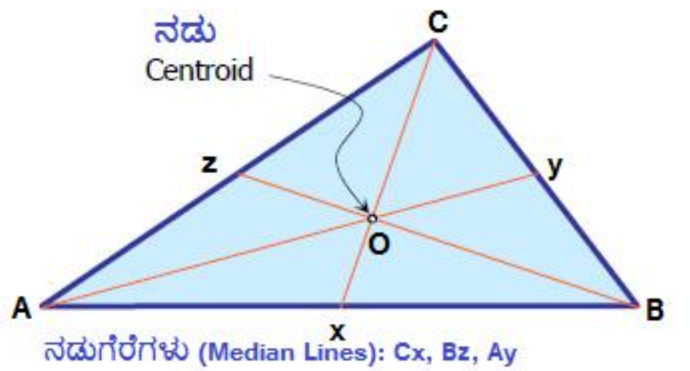
ಮೂಲೆಗಳು: $\angle\alpha > 90°$ (ಹಿರಿಮೂಲೆ), $\angle\beta + \angle\gamma < 90°$.

ಬದಿಗಳು: $c^2 > b^2 + a^2$

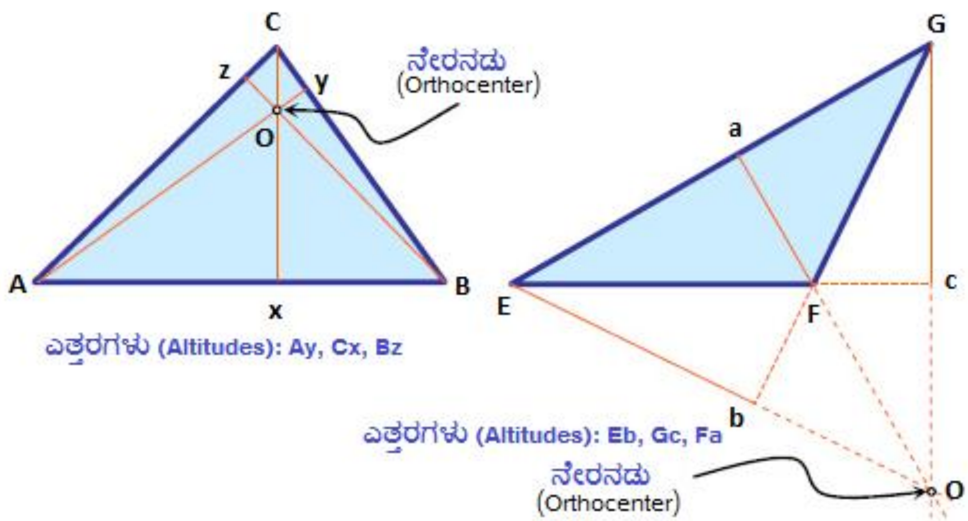
ಮೂರ್ಬದಿಯ ನಡುಗಳು:

ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬಳಕೆಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಹಲವು ಬಗೆಯ ನಡುಗಳನ್ನು(Centers) ಹೊಂದಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

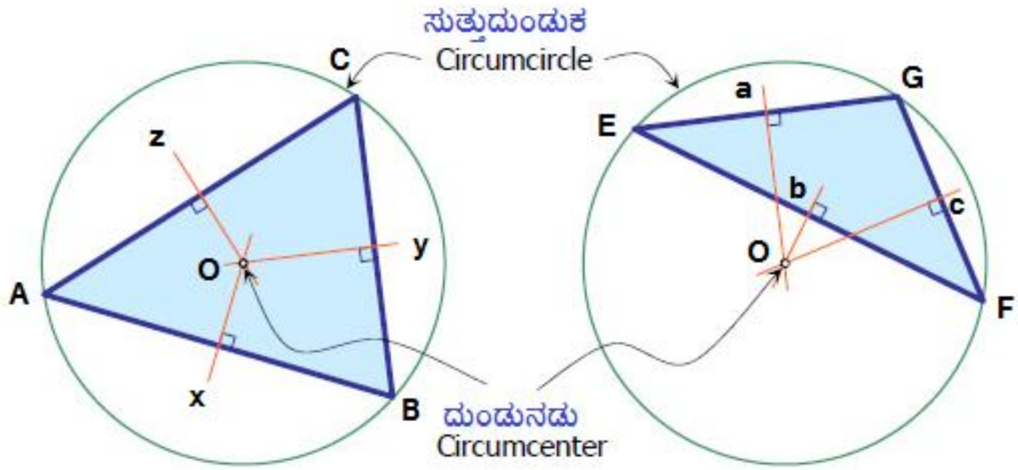
1) ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ನಡುಗೆರೆಗಳು (Median Lines) ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕತ್ತರಿಸುವೆಡೆಯನ್ನು (Intersection) **ನಡು** (Centroid) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನಡುವು (Centroid) ನಡುಗೆರೆಯನ್ನು 2 : 1 (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ CO : Ox = 2 : 1) ಪಾಲನ್ನಾಗಿಸುತ್ತದೆ.



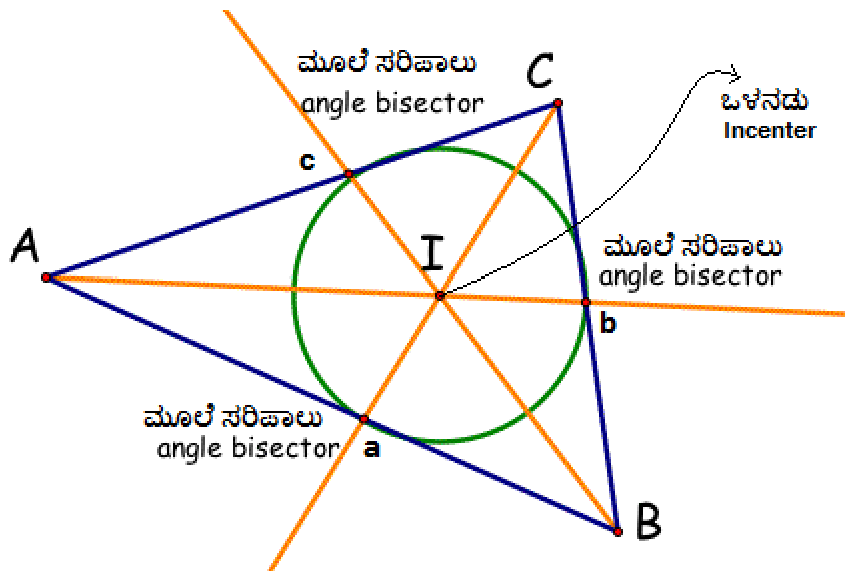
2) ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಎತ್ತರಗಳು (Altitudes) ಒಂದನ್ನೊಂದು ಹಾದುಹೋದಾಗ ಸಿಗುವ ನಡುವನ್ನು **ನೇರನಡು** (Orthocenter) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ, ಹಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ನೇರನಡು ಹೊರಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕಿರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ನೇರನಡು ಒಳಗಿರುತ್ತದೆ.



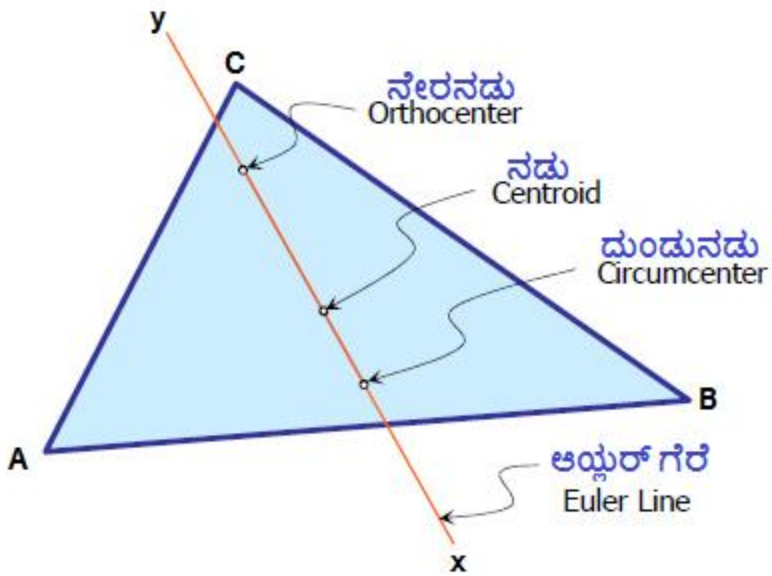
3) ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳು ತಾಗುವಂತೆ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ದುಂಡುಕವನ್ನು ಸುತ್ತುದುಂಡುಕ (Circumcircle) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ನಡುವನ್ನು **ದುಂಡುನಡು** (circumcenter) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ದುಂಡುನಡುವಿನಿಂದ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬದಿಗಳಿಗೆ ನೇರಡ್ಡವಾಗಿ (Perpendicular) ಗೆರೆ ಎಳೆದಾಗ ಗೆರೆಗಳು ಬದಿಗಳನ್ನು ಸರಿಪಾಲಾಗಿ ಸೀಳುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು **ನೇರಡ್ಡ-ಸರಿಪಾಲು** (Perpendicular Bisector) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.



4) ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಸಬಹುದಾದ ಒಂದು ದುಂಡುಕವನ್ನು ಇಟ್ಟಾಗ ಅದರ ನಡುವು (Centre of a circle) ಮೂರ್ಬದಿಯ ಒಳನಡುವಾಗಿರುತ್ತದೆ (Incentre of a triangle) ಮತ್ತು ಮೂರ್ಬದಿಯ ತುದಿಗಳಿಂದ (Vertices) ಹಾದುಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಗೆರೆಗಳು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಸರಿಪಾಲನ್ನಾಗಿ (Angle Bisectors) ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ.



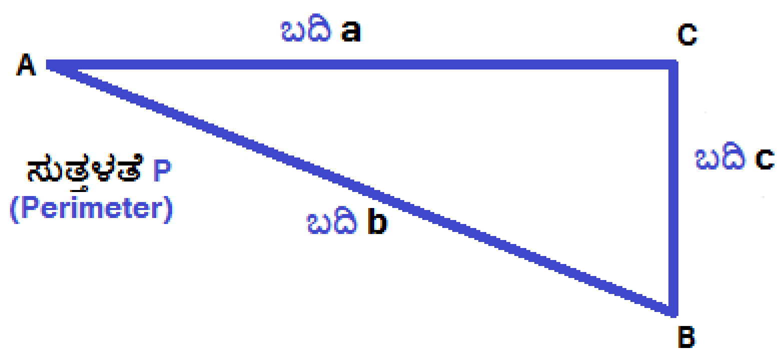
5) ಮೂರ್ಬದಿಯ ದುಂಡುನಡು (circumcenter), ನಡು (Centroid) ಮತ್ತು ನೇರನಡು (Orthocenter)ಗಳ ಮೇಲೆ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೆರೆಯನ್ನು **ಆಯ್ಲರ್ ಗೆರೆ** (Euler Line) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ, ಇದನ್ನು ಮೂರ್ಬದಿಯ ನಡುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಬಳಕೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.



ಸರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ನಡುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರಲ್ಲಿ ಆಯ್ಲರ್ ಗೆರೆ ಸರಿಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ.

ಮೂರ್ಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ.

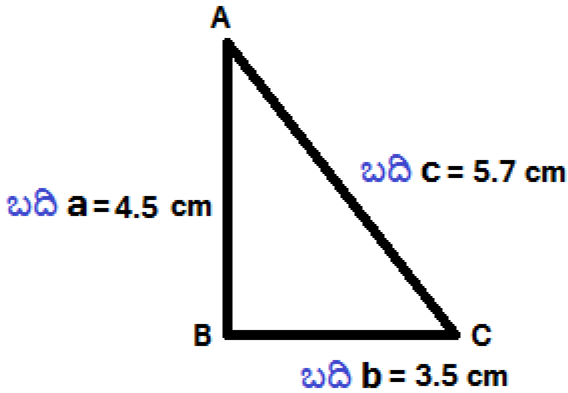
ನಾವೀಗ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ, ಅದರ ಬದಿಗಳು a, b, c ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆ P ಆಗಿರಲಿ.



ಮೂರ್ಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ತುಂಬಾ ಸುಲಭ. ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳ ಮೊತ್ತವೇ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

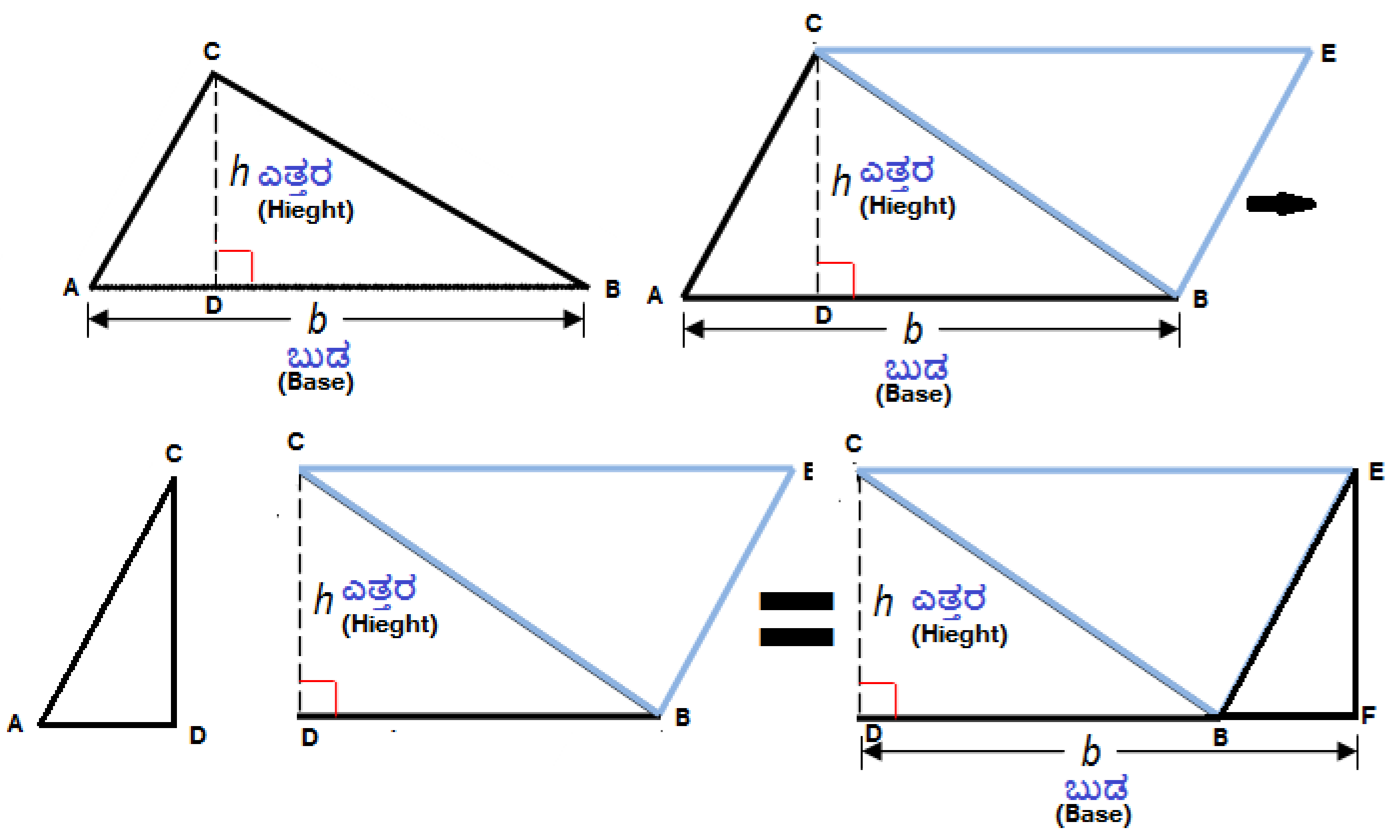
ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ $P = AB + BC + CA = a + b + c$

ಉದಾಹರಣೆ: ನಾವೀಗ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ, ಅದರ ಬದಿಗಳು a =3.5 cm , b = 4.5 cm, c = 5.7 cm ಆದಾಗ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.



ಮೂರ್ಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ P = AB + BC + CA = a + b +c = 3.5 + 4.5 + 5.7 = 13.7 cm.

ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ.



ನಾವೀಗ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ, ಅದರ ಬದಿಗಳು AB, BC, CA ಮತ್ತು ಬುಡ (Base) AB = b, ಎತ್ತರ (Height) CD = h ಆಗಿರಲಿ.

ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಅಳತೆಯನ್ನೇ ಹೊಂದಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು BCE ಮೂರ್ಬದಿಯನ್ನು ABC ಮೂರ್ಬದಿಗೆ ತಾಗಿಕೊಂಡಂತೆ ಬಿಡಿಸೋಣ. ಈಗ ನಮಗೊಂದು ABEC ಎಂಬ ನಾಲ್ಬದಿ (Quadrilateral) ಸಿಕ್ಕಿತು.

ABEC ನಾಲ್ಬದಿಯಿಂದ ADC ಮೂರ್ಬದಿಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ನಂತರದಲ್ಲಿ ADC ಮೂರ್ಬದಿಯನ್ನು AC ಮತ್ತು BE ಬದಿಗಳು ಹೊಂದುವಂತೆ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸೋಣ, ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿಕೊಂಡ ADC ಮೂರ್ಬದಿಯನ್ನು BFE ಎಂದು ಹೆಸರಿಸೋಣ. ಈಗ ನಮಗೊಂದು DFEC ಎಂಬ ನಾಲ್ಸರಿಬದಿ / ಆಯತ (Rectangle) ಸಿಕ್ಕಿತು.

ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಸರಿಬದಿಯ ಹರವು Ar = ಉದ್ದ (Length) x ಅಗಲ (Width) ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

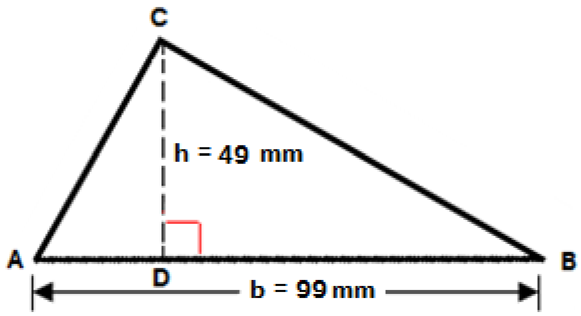
DFEC ನಾಲ್ಸರಿಬದಿಯ ಹರವು Ar = ಉದ್ದ (Length) x ಅಗಲ (Width) = ಬುಡ (Base) x ಎತ್ತರ (Height) = b x h = bh
ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ DFEC ನಾಲ್ಸರಿಬದಿಯು ಎರಡು ಸರಿಯಳತೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಗಳಾದ (Similar Triangles) ABC ಮತ್ತು BCE ಗಳಿಂದ ಮಾರ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

DFEC ನಾಲ್ಸರಿಬದಿಯ ಹರವು Ar = b x h = ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು + BCE ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು = 2 x
ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು.

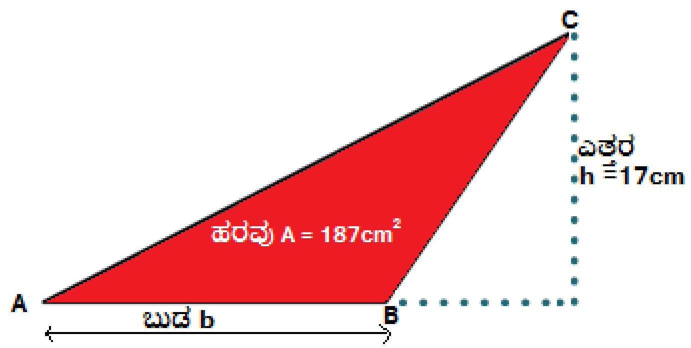
ಆದ್ದರಿಂದ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು A = b x h/2 =1/2 x bh

ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು (area of triangle) = 1/2 (ಬುಡ x ಎತ್ತರ)

ಉದಾಹರಣೆ1: ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬುಡ (Base b) AB = 99 mm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ (Height h) CD = 49 mm ಇದ್ದಾಗ ಅದರ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು A = 1/2 (ಬುಡ x ಎತ್ತರ) = 1/2 x bh = 1/2 x AB x CD = 1/2 x 99 x 49 = 2425.5 mm^2
ಉದಾಹರಣೆ2: ಒಂದು ABC ಸರಿ-ಇಬ್ಬದಿಯ ಮೂರ್ಬದಿಯ (Isosceles Triangle) ಹರವು A = 187 cm^2, ಎತ್ತರ h =17 cm ಆದಾಗ ಬದಿ BC ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



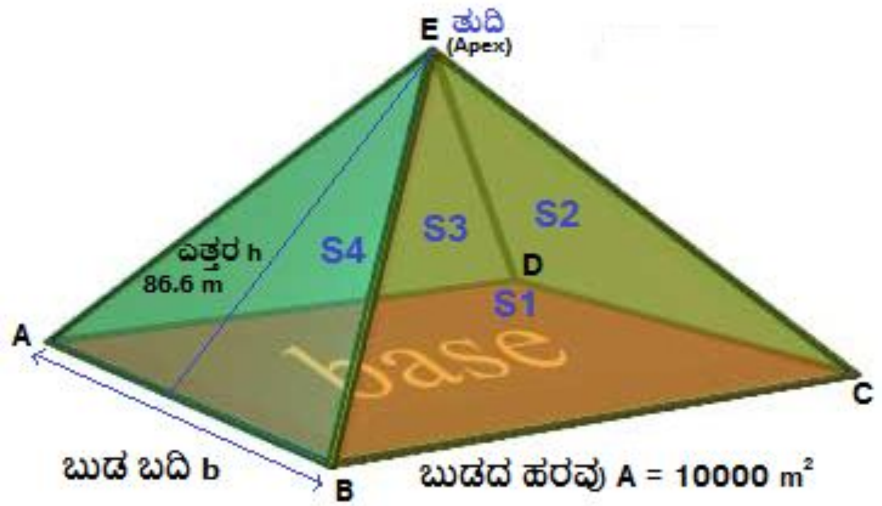
ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು A = 1/2 ಬುಡ x ಎತ್ತರ = 1/2 x b x h = 1/2 x b x 17 = 187 cm^2

ಬದಿ AB = b = 187 x 2/17 = 22 cm.

ABC ಯು ಒಂದು ಸರಿ-ಇಬ್ಬದಿ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಬದಿಗಳಾದ AB ಮತ್ತು BC ಗಳು ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ BC ಬದಿಯ ಉದ್ದ BC = AB = b = 22 cm ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: 10000 m^2 ಹರವಿನ ಚೌಕದ ಬುಡವನ್ನು (Square Base) ಹೊಂದಿದ ಮತ್ತು ಸರಿಯಳತೆಯ ಮೂರ್ಬದಿ (Equilateral Triangle) ಗೋಡೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಒಟ್ಟು ಹರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಬುಡದಿಂದ ತುದಿಯವರೆಗೆ (Base to Apex) ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಎತ್ತರ 86.6 m ಆಗಿದೆ.

ಬುಡವು ಚೌಕವಾಗಿದ್ದರಿಂದ ABCD ಚೌಕದ ಹರವು A1 = ಬದಿ x ಬದಿ = b2 = 10000 m^2

ಆದ್ದರಿಂದ ಬದಿಯ ಉದ್ದ AB = b = √10000 = 100 m

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ನಾಲ್ಕು ಗೋಡೆಗಳು ಸರಿಯಳತೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಗಳಾಗಿವೆ ಹಾಗು ಚೌಕದ ಬದಿಗಳು ಮೂರ್ಬದಿಗಳ ಬದಿಗಳಾಗಿವೆ, ಇದರಿಂದ ಮೂರ್ಬದಿಗಳ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

- ABE ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು A2 = 1/2 x b x h = 1/2 x 100 x 86.6 = 4330 m^2
- BCE ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು A3 = 1/2 x b x h = 1/2 x 100 x 86.6 = 4330 m^2

- CDE ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು A4 = 1/2 x b x h = 1/2 x 100 x 86.6 = 4330 m^2
- DAE ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು A5 = 1/2 x b x h = 1/2 x 100 x 86.6 = 4330 m^2

ABCDE ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಒಟ್ಟು ಹರವು

= ABCD ಚೌಕದ ಹರವು A1 + ABE ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು A2 + BCE ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು A3 + CDE ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು A4 + DAE ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು A5

=10000 + 4330 + 4330 + 4330 + 4330 = 27320 m2

ಆದ್ದರಿಂದ **ABCDE ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಒಟ್ಟು ಹರವು = 27320 m^2**

ಕೆಲವು ಹೆಸರುವಾಸಿಯಾದ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಕಟ್ಟಲೆಗಳು:

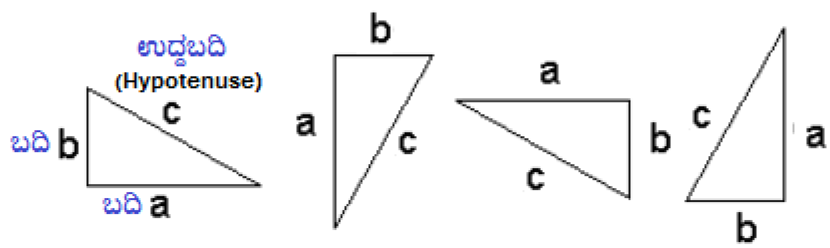
1. ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Pythagoras Theorem):

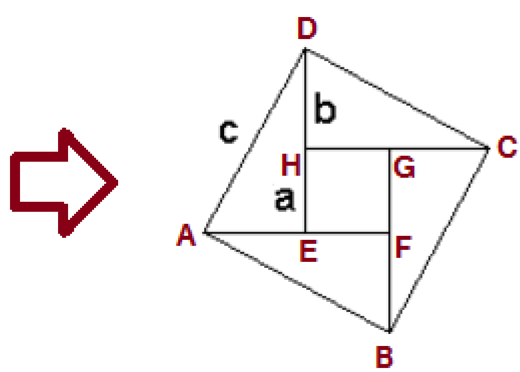
ಹೇಳಿಕೆ:

ಸರಿಮೂಲೆ ಮೂರ್ಬದಿಯ (right angle triangle) ಉದ್ದಬದಿಯ ಇಮ್ಮಡಿಯು (Square of hypotenuse) ಉಳಿದ ಎರಡು ಬದಿಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ತೋರಿಸಿಕೆ (Proofs):

a, b ಮತ್ತು c ಬದಿಯುಳ್ಳ ಒಂದು ಸರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯನ್ನು (Right Angle Triangle) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ, ಅದರ ಉದ್ದಬದಿಯು (Hypotenuse) c ಮತ್ತು ಬುಡ a ಆಗಿರಲಿ.





ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಂತೆ ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ a ,b, c ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ನಾಲ್ಕು *ಸರಿಮೂಲೆ* ಮೂರ್ಬದಿ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈಗ ನಮಗೆ ಎರಡು ಚೌಕಗಳು ಸಿಕ್ಕಿವೆ, ದೊಡ್ಡ ಚೌಕವನ್ನು ABCD ಎಂದು ಮತ್ತು ಚಿಕ್ಕ ಚೌಕವನ್ನು EFGH ಎಂದು ಹೆಸರಿಸೋಣ.

ಇದರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡಚೌಕ ABCD ಯ ಬದಿ AB = BC = CD = DA = ಉದ್ದಬದಿ (Hypotenuse) = c ಆಗಿದೆ.

ಚಿಕ್ಕಚೌಕ EFGH ನ ಬದಿ EF = FG = GH = HE = (AF – AE) = (BG – BF) = (CH – CG) = (DE – DH) = (a-b) ಆಗಿದೆ.

ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ಹರವು A1 = ಚಿಕ್ಕಚೌಕದ ಹರವು A2 + ನಾಲ್ಕು *ಸರಿಮೂಲೆ* ಮೂರ್ಬದಿ ಆಕೃತಿಗಳ ಹರವು A3 ಆಗಿದೆ.

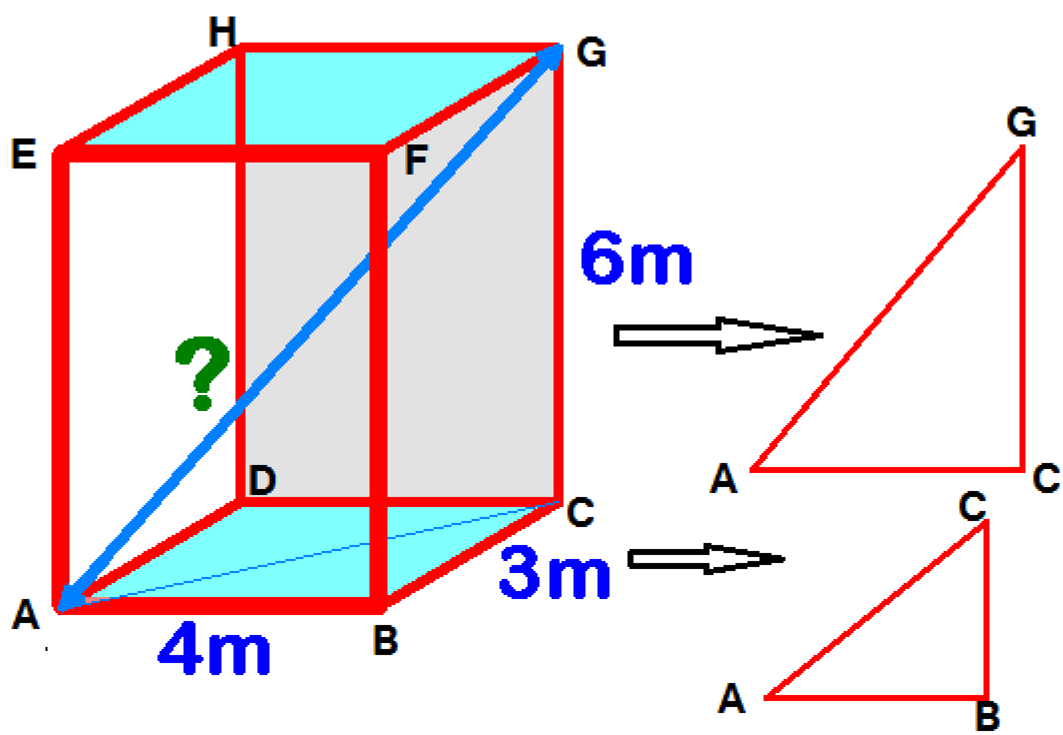
ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವಂತೆ ಚೌಕದ ಹರವು A = ಬದಿ x ಬದಿ ಮತ್ತು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹರವು = (ಬುಡ x ಎತ್ತರ)/2.

ಆದ್ದರಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ಹರವು A1 = c x c = (a-b) x (a-b) + 4 x 1/2 x a x b

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆದಾಗ A1 = c^2 = ಉದ್ದಬದಿ x ಉದ್ದಬದಿ = $a^2 - \cancel{2ab} + b^2 + \cancel{2ab} = a^2 + b^2$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಿಮೂಲೆ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಉದ್ದಬದಿಯ ಇಮ್ಮಡಿಯು (**c^2**) ಉಳಿದ ಎರಡು ಬದಿಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ (**$a^2 + b^2$**) ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ABCDEFGH ಎಂಬ ನಾಲ್ಬದಿಯಾಕಾರದ (Rectangular) ಒಂದು ಗಾಜಿನ ತೊಟ್ಟಿಯ ಬುಡದ ಬದಿಗಳು 4m ಮತ್ತು 3m ಆಗಿವೆ ಹಾಗು ಅದರ ಎತ್ತರ 6m ಆಗಿದೆ, ನಾವೀಗ ಅದರ ಮೂಲೆಗೆರೆಯ (Diagonal) ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.



ABCDEFGH ಗಾಜಿನ ತೊಟ್ಟಿಯ EACG ಸೀಳುನೋಟವನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ನಮಗೆ AGC ಮತ್ತು ABC ಎಂಬ ಸರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಗಳು (Right Angle Triangles) ಸಿಗುತ್ತವೆ.

AG ಮೂಲೆಗೆರೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು (Length of the Diagonal) ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮೊದಲು ನಾವು AC ಮೂಲೆಗೆರೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಬೇಕು.

ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಕಟ್ಟಲೆಯಂತೆ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಉದ್ದಬದಿಯ ಇಮ್ಮಡಿ (Square of the Hypotenuse) $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ಅಗ್ಗಿರುತ್ತದೆ.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, ಆದ್ದರಿಂದ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಉದ್ದಬದಿ AC = 5m ಆಗಿದೆ.

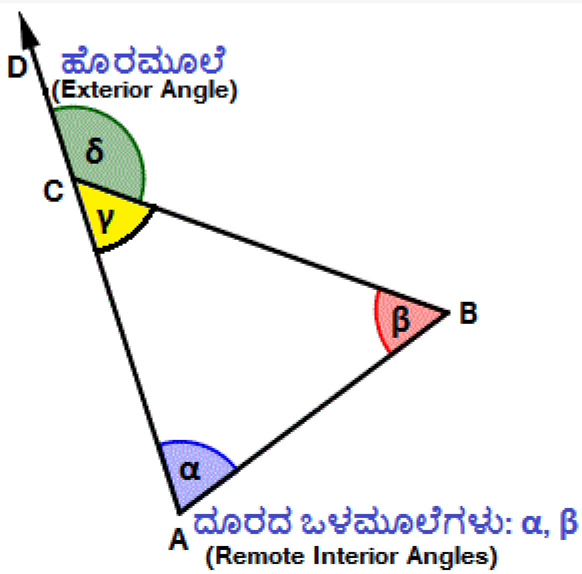
ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಕಟ್ಟಲೆಯಂತೆ ACG ಮೂರ್ಬದಿಯ ಉದ್ದಬದಿಯ ಇಮ್ಮಡಿ $AG^2 = AC^2 + GC^2$ ಅಗ್ಗಿರುತ್ತದೆ.

$AG^2 = AC^2 + GC^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$ à ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಉದ್ದಬದಿ (Hypotenuse) $AG = \sqrt{61} = 7.81$ m ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ABCDEFGH ಗಾಜಿನ ತೊಟ್ಟಿಯ AG ಮೂಲೆಗೆರೆಯ (Diagonal) ಉದ್ದ 7.81 m ಆಗಿದೆ.

2. ಹೊರಮೂಲೆಯ ಕಟ್ಟಲೆ (Exterior Angle Theorem):

ಹೇಳಿಕೆ 1:

ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹೊರಮೂಲೆಯು (Exterior Angle) ಅದರ ದೂರದ ಎರಡು ಒಳಮೂಲೆಗಳ (Remote Interior Angles) ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ತೋರಿಸಿಕೆ (Proof): ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹೊರಮೂಲೆ (Exterior Angle) δ ಮತ್ತು ಅದರ ದೂರದ ಎರಡು ಒಳಮೂಲೆಗಳು (Interior Angles) α, β ಆಗಿರಲಿ.

ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ T1 = ∠CAB + ∠ABC + ∠ACB = $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ನೇರ ಗೆರೆಯ ಮೂಲೆಯ ಅಳತೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ,
ಆದ್ದರಿಂದ ACD ಗೆರೆಯ ಮೂಲೆಯ ಅಳತೆ T2 = ∠ACD = ∠ACB + ∠BCD = $\gamma + \delta = 180°$.

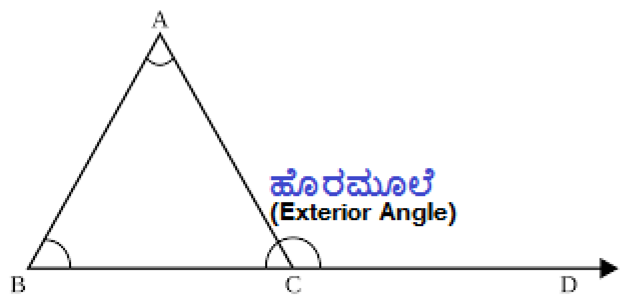
T1 ಮತ್ತು T2 180° ಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, T1 = T2 = $\alpha + \beta + \gamma = \gamma + \delta$ à $\delta = \alpha + \beta$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹೊರಮೂಲೆ δ ದೂರದ ಎರಡು ಒಳಮೂಲೆಳಾದ α, β ಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ”.

ಹೇಳಿಕೆ 2:

ಒಂದು ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹೊರಮೂಲೆಯು ಅದರ ದೂರದ ಎರಡು ಒಳಮೂಲೆಗಳಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ತೋರಿಸಿಕೆ (Proofs): ಮೊದಲ ಹೇಳಿಕೆಯಿಂದ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವಂತೆ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹೊರಮೂಲೆ δ ದೂರದ ಎರಡು ಒಳಮೂಲೆಳಾದ α, β ಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ.
$\delta = \alpha + \beta$ ಆದ್ದರಿಂದ $\delta > \alpha$ ಮತ್ತು $\delta > \beta$ ಆಗಿದೆ.
ಉದಾಹರಣೆ: ABC ಒಂದು ಸರಿಯಳತೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯಾದರೆ (Equilateral Triangle) ಅದರ ಹೊರಮೂಲೆಯನ್ನು(Exterior Angle) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸರಿಯಳತೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳು ಸರಿಯಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ
∠CAB = ∠ABC = ∠BCA ಮತ್ತು ∠CAB + ∠ABC + ∠BCA = 180°

3 x ∠CAB = 180° à ∠CAB = ∠ABC = ∠BCA = 60°

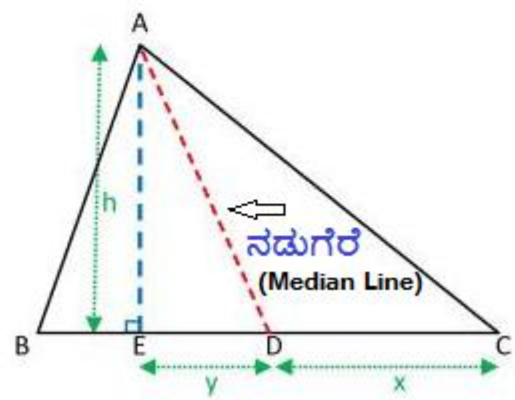
ಸರಿಮೂಲೆಯ ಕಟ್ಟಲೆಯಂತೆ ಹೊರಮೂಲೆ ∠ACD = ದೂರದ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ ∠CAB + ∠ABC = 60° + 60° = 120°
ಆದ್ದರಿಂದ ಹೊರಮೂಲೆ ∠ACD = 120° ಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

3. ಅಪೊಲೊನಿಯಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Apollonius Theorem):

ಹೇಳಿಕೆ:

ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬದಿಯ ಇಮ್ಮಡಿಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೇ ಬದಿಯ ಅರೆಪಾಲಿನ ಇಮ್ಮಡಿ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಬದಿಗೆ ಎಳೆದ ನಡುಗೆರೆಯ (Median) ಇಮ್ಮಡಿಗಳ ಮೊತ್ತದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ತೋರಿಸಿಕೆ (Proofs): ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ನಾವು ಅಪೊಲೊನಿಯಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ AB2 + AC2 = 2(AD2 + BD2) ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ನಡುಗೆರೆ (Median) AD ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರ AE = h ಆಗಿರಲಿ, ಬದಿತುಂಡುಗಳನ್ನು ED = y ಮತ್ತು DC = x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABE ಮತ್ತು AEC ಎಂಬ ಎರಡು ಸರಿಮೂಲೆಯ (Right Angle Triangles) ಮೂರ್ಬದಿಗಳು ಕಾಣಸಿಗುತ್ತವೆ.



ABE ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಕಟ್ಟಲೆಯಂತೆ $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

AEC ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಕಟ್ಟಲೆಯಂತೆ $AC^2 = AE^2 + EC^2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $AB^2 + AC^2 = AE^2 + BE^2 + AE^2 + EC^2$

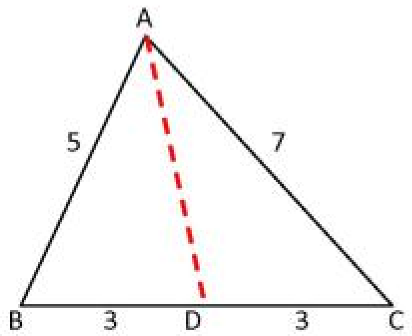
$AB^2 + AC^2 = h^2 + (x - y)^2 + h^2 + (x + y)^2$

$AB^2 + AC^2 = h^2 + x^2 - 2xy + y^2 + h^2 + x^2 + 2xy + y^2$

$AB^2 + AC^2 = 2(h^2 + x^2 + y^2)$, ಇಲ್ಲಿ $AD^2 = h^2 + y^2$ ಮತ್ತು $BD^2 = x^2$ ಆಗಿದೆ

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೊಲೊನಿಯಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ $\mathbf{AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)}$ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿದಂತಾಯ್ತು.

ಉದಾಹರಣೆ: ಕೆಳಗಿನ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ AD ಒಂದು ನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಬದಿಗಳು AB =5, AC =7, BC = 6 ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದಾಗ ಅದರ ನಡುಗೆರೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು (Length of the Median) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



AD ನಡುಗೆರೆಯು BC ಬದಿಯನ್ನು ಸರಿಪಾಲಾಗಿ ಸೀಳುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ BD = DC = 3

ಅಪೊಲೊನಿಯಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ಅನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಾಗ

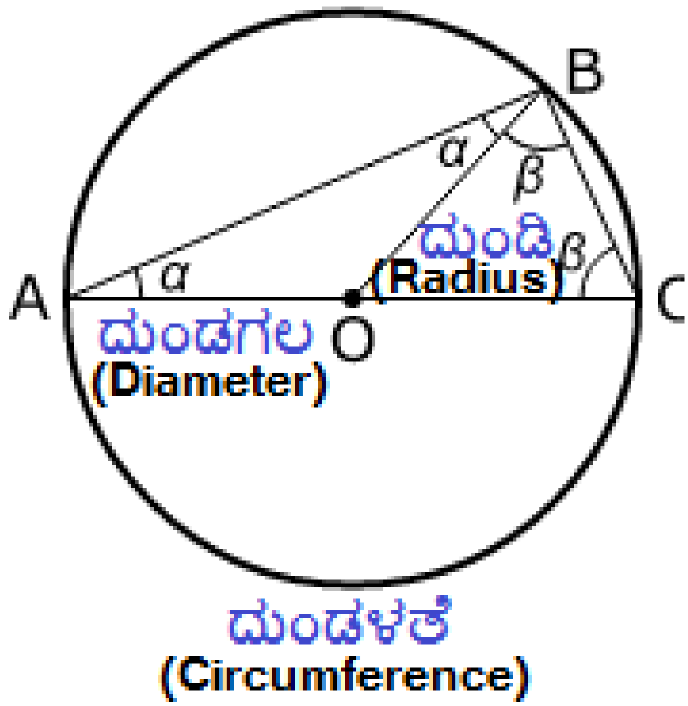
$AB^2 + AC^2 = 5^2 + 7^2 = 2 \times (AD^2 + 3^2)$
$AB^2 + AC^2 = 25 + 49 = 2 \times (AD^2 + 9)$, ಇದನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸಿದಾಗ
ನಡುಗೆರೆ $AD^2 = 28$ -> $AD = \sqrt{(4 \times 7)}$ à $AD = 2\sqrt{7}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

4. ತೇಲ್ಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Thales Theorem):

ಹೇಳಿಕೆ:

ದುಂಡಗಲದಿಂದ (Diameter) ದುಂಡುಕದ (Circle) ಯಾವುದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿ (Sides of a Circle) ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಮೂಲೆಯು ಸರಿಮೂಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ (Right Angle)

ತೋರಿಸಿಕೆ (Proofs): ಒಂದು ದುಂಡುಕದ ದುಂಡಗಲ (Diameter) AC ಮತ್ತು ದುಂಡಿ (Radius) OB ಆಗಿರಲಿ, ದುಂಡಗಲದಿಂದ ದುಂಡುಕದ ಬದಿ B ಗೆ ಎಳೆದ ಗೆರೆಗಳು AB ಮತ್ತು BC ಆಗಿರಲಿ.

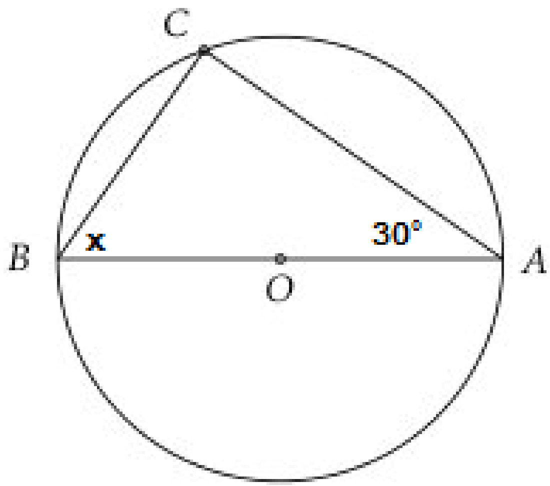


OA, OB, OC ಬದಿಗಳು ದುಂಡಿಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ OA = OB = OC ಆಗಿರುತ್ತವೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ OBA ಮತ್ತು OBC ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಸರಿಇಬ್ಬದಿಯ ಮೂರ್ಬದಿಗಳು (Isosceles Triangles) ಹಾಗು ABC ಮೂರ್ಬದಿ ಕಾಣಸಿಗುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ OBA ಮೂರ್ಬದಿಯ ಮೂಲೆ $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$ ಮತ್ತು $\angle OBC = \angle OCB = \beta$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.
ಇದರಿಂದ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಮೂಲೆಗಳು $\angle CAB = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $\angle ABC = \alpha + \beta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
ಯಾವುದೇ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ $\angle CAB + \angle ACB + \angle ABC = \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2(\alpha + \beta) = 180°$
ಆದ್ದರಿಂದ $\alpha + \beta = 90°$ ಆಗುತ್ತದೆ. ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವಂತೆ ಮೂಲೆ $\angle ABC = \alpha + \beta$ ಆಗಿದೆ, ಹಾಗಾಗಿ ಮೂಲೆ $\angle ABC = 90°$ ಆಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ದುಂಡಗಲದಿಂದ ದುಂಡುಕದ ಯಾವುದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಮೂಲೆಯೂ ಸರಿಮೂಲೆಯಾಗಿದೆ (Right Angle).

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ದುಂಡುಕದ ಒಳಗಿನ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ದುಂಡಗಲ BA ದಿಂದ ದುಂಡುಕದ ಬದಿ C ಗೆ ಎಳೆದ ಗೆರೆ AC ಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಮೂಲೆ $\angle CAB = 30°$ ಆಗಿದೆ, ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲೆ $\angle CBA = x$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ತೇಲ್ಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ ಯಂತೆ $\angle BCA = 90°$ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ABC ಮೂರ್ಬದಿಯ ಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ $\angle BCA + \angle CAB + \angle CBA = 90° + 30° + \angle CBA = 180°$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲೆ $\angle CBA = x = 60°$

ಮೂರ್ಬದಿಯ ಕಟ್ಟಲೆಗಳು ಹಲವಾರಿವೆ!

ಮೂರ್ಬದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಕಟ್ಟಲೆಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು. ಈ ಮೇಲಿನವುಗಳಲ್ಲದೇ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹಲವಾರು ಕಟ್ಟಲೆಗಳಿವೆ. ಆ ಕಟ್ಟಲೆಗಳು, ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದವರು, ಅವುಗಳ ಬಳಕೆ ಮತ್ತು ಆ ಕಟ್ಟಲೆಗಳು ಯಾವಾಗ ಹೊರಹೊಮ್ಮಿದವು ಅನ್ನುವುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಕಟ್ಟಲೆಗಳು	**ಮೂರ್ಬದಿ ಬಳಕೆ**	**ಅರಿಗರು**	**ನಾಡು ಮತ್ತು ಅಂದಾಜು ಹೊತ್ತು**
ಸರಿಇಬ್ಬದಿ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಕಟ್ಟಲೆ (Isosceles triangle theorem)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು	ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಪಾಪಸ್ ಲೆಜಂಡ್ರೆ	ಗ್ರೀಕ್-ಈಜಿಪ್ಟ್, 300 BC ಗ್ರೀಕ್-ಈಜಿಪ್ಟ್ 300 BC ಪ್ರಾನ್ಸ್ 1800 AD
ಬದಿ ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳ ಕಟ್ಟಲೆಗಳು: SAS, SSS, ASA, AAS, RHS	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು	ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ತೇಲ್ಸ್	ಗ್ರೀಕ್ -ಈಜಿಪ್ಟ್, 300 BC ಗ್ರೀಕ್, 600 BC

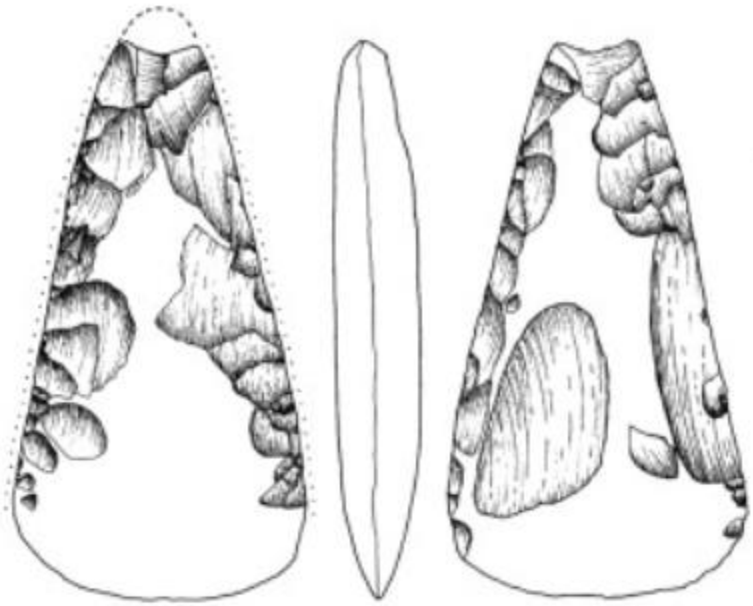
ನಿವೆನ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Niven's Theoram)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು ಕಟ್ಟಲೆ ತಪ್ಪಿದ ಅಂಕಿ (Irrational Number)	ಇವಾನ್.ಎಂ.ನಿವೆನ್	ಕೆನಡಾ-ಅಮೆರಿಕ 1915 – 1999 AD
ಲಾಂಬರ್ಟ್ ಕೊಸೈನ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Lamberts cosine law)	ಮೂಲೆಗಳು, ಬೆಳಕಿನರಿಮೆ (Optics)	ಜೋಹಾನ್ ಹೆನ್ರಿಚ್ ಲಾಂಬರ್ಟ್	ಪ್ರಾನ್ಸ್, 1728 – 1777 AD
ಕೆಪ್ಲರ್ ಮೂರ್ಬದಿ (Kepler's Triangle)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು, ಸರಿಪಟ್ಟೆಣಿಕೆಯ ಸಾಲು (Geometric Progression)	ಜೋಹಾನ್ಸ್ ಕೆಪ್ಲರ್	ಜರ್ಮನಿ, 1571 -1630 AD
ಸೆವಾ'ನ ಕಟ್ಟಲೆ (Ceva's Theorem)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು	ಜಿಯೊವನಿ ಸೆವಾ	ಇಟಲಿ, 1647 – 1734 AD
ಮೆನೆಲಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Menelaus' theorem)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು	ಮೆನೆಲಸ್	ಗ್ರೀಕ್ -ಈಜಿಪ್ಟ್, 100 BC
ಒಂಬತ್ತು ಚುಕ್ಕೆಯ ದುಂಡುಕ (Nine-point circle)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು, ದುಂಡುಕ	ಲಿಯೊನಾರ್ಡ್ ಆಯ್ಲರ್ ಓಲ್ರಿ ತೆರಕಂ ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್ಬಾಚ್	ಸ್ವಿಟ್ಜರ್ಲ್ಯಾನ್ಡ್, 1707 – 1783 AD ಪ್ರಾನ್ಸ್, 1782 – 1862 AD ಜರ್ಮನಿ, 1800 – 1834 AD
ಹೆರೋನ್ ಸಾಟಿಕೆ (Heron's Formula/Equation)	ಬದಿಗಳು, ಮೂಲೆಗಳು ಮತ್ತು ಹರವು	ಹೆರೋನ್	ಗ್ರೀಕ್ -ಈಜಿಪ್ಟ್ 10 – 70 AD
ಆಯ್ಲರ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Euler's theorem)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು, ದುಂಡುಕ	ಲಿಯೊನಾರ್ಡ್ ಆಯ್ಲರ್	ಸ್ವಿಟ್ಜರ್ಲ್ಯಾನ್ಡ್, 1707 – 1783 AD
ಕಾರ್ನಾಟ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Carnot's theorem)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು, ದುಂಡುಕ	ಲಾಜರೆ ಕಾರ್ನಾಟ್	ಪ್ರಾನ್ಸ್, 1753 – 1823 AD
ಮೋರ್ಲೆಯ ಮೂರ್ಪಾಲು ಕಟ್ಟಲೆ (Morley's trisector theorem)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು	ಪ್ರಾಂಕ್ ಮೋರ್ಲೆ	1860 – 1937 AD ಇಂಗ್ಲೆಂಡ್-ಅಮೆರಿಕಾ

ಸ್ಟೀನರ್ ಒಳಮೊಟ್ಟೆಸುತ್ತು (Steiner inellipse)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು, ಮೊಟ್ಟೆಗೆರೆ	ಜಾಕೋಬ್ ಸ್ಟೀನರ್	ಸ್ವಿಟ್ಜರ್‍ಲ್ಯಾನ್ಡ್, 1796 – 1863 AD
ಸಿಮ್ಸನ್ ಗೆರೆ (Simson’s Line)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು, ದುಂಡುಕ	ರಾಬರ್ಟ್ ಸಿಮ್ಸನ್	ಸ್ಕಾಟ್ಲ್ಯಾನ್ಡ್, 1687 – 1768 AD
ನಾಗೇಲ್ ಚುಕ್ಕೆ (Nagel Point)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು, ದುಂಡುಕ	ಕ್ರಿಶ್ಚಿಯನ್ ಹೆನ್ರಿಚ್ ವಾನ್ ನಾಗೇಲ್	ಜರ್ಮನಿ, 1803 – 1882 AD
ಡೇಸಾರ್ಜಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Desargues’s theorem)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು	ಗಿರಾರ್ಡ್ ಡೇಸಾರ್ಜಸ್)	ಪ್ರಾನ್ಸ್, 1591 – 1661AD
ಪೆರ್ಮಾಟ್ ಚುಕ್ಕಿ (Fermat Point)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು	ಪಿಯರೆ ಡಿ ಪೆರ್ಮಾಟ್	ಪ್ರಾನ್ಸ್, 1607 – 1665 AD
ಹಡ್ವಿಂಜರ್-ಪಿನ್ಸ್ಲರ್ ಸರಿಯಿಲ್ಲದಿರುವಿಕೆ (Hadwiger–Finsler inequality)	ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು	ಹ್ಯೂಗೋ ಹಡ್ವಿಂಜರ್ ಪಾಲ್ ಪಿನ್ಸ್ಲರ್	ಸ್ವಿಟ್ಜರ್‍ಲ್ಯಾನ್ಡ್, 1908 – 1981 AD ಜರ್ಮನಿ-ಸ್ವಿಟ್ಜರ್‍ಲ್ಯಾನ್ಡ್ 1894 -1970 AD
ಪೆಡೋ’ನ ಸರಿಯಿಲ್ಲದಿರುವಿಕೆ (Pedoe’s inequality)	ಬದಿಗಳು, ಮೂಲೆಗಳು ಮತ್ತು ಹರವು	ಡೇನಿಯಲ್ ಪೆಡೊ	ಇಂಗ್ಲೆಂಡ್, 1910-1998 AD

ಚಟುವಟಿಕೆ: ಆಯ್ಲರ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Euler’s Theorem) ಸೇರಿದಂತೆ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕಟ್ಟಲೆಗಳ ಮಾಹಿತಿ ಕಲೆಹಾಕಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸಿರಿ. ಈ ಕುರಿತು ಏನಾದರೂ ಮಾಹಿತಿ ಬೇಕಿದ್ದರೆ ’ಅರಿಮೆ’ಯ ಮಿಂಚೆ ವಿಳಾಸಕ್ಕೆ ಬರೆಯಿರಿ.

ಮೂರ್ಬದಿಯ ಹಳಮೆ:

1. ಹಿಂದೆ ಕಲ್ಲುಯುಗದ ಮಂದಿ (Stone age people) ಕಲ್ಲಿನ ಮೂರ್ಬದಿಯಾಕಾರದ ಬೆಣಚುಕಲ್ಲಿನ ಉಳಿಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. 2000 BC ಹೊತ್ತಿಗೆ ಸೇರಿದ ಕರ್ನಾಟಕದ ಸಂಗನಕಲ್ಲು-ಕುಪ್ಪಗಲ್ಲು ಎಂಬ ಹೊಸಗಲ್ಲುಯುಗದ (Neolithic) ತಾಣದಲ್ಲಿ ಮೂರ್ಬದಿಯಾಕಾರದ ಕಲ್ಲಿನ ಉಳಿಗಳು ಸಿಕ್ಕಿವೆ.



2. ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಪೆರೋ (Pharaoh) ಅರಸರು ಸುಮಾರು 2700 BC ಇಂದ 500 BC ಗಳವರೆಗೆ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ಮೂರ್ಬದಿಯಾಕಾರವನ್ನು ಬಳಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದರು.

3. ಗ್ರೀಕಿನ ಹೆಸರಾಂತ ಎಣಿಕೆಯರಿಗ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ನ ಹೊತ್ತಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಅಡಕದಲ್ಲಿ (Euclid’s Elements) ಮೂರ್ಬದಿಗಳ ಹಲವಾರು ವಿಷಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

4. ಸುಮಾರು 600 BC ಹೊತ್ತಿನ ಗ್ರೀಕಿನ ಹೆಸರಾಂತ ಎಣಿಕೆಯರಿಗರಾದ ತೇಲ್ಸ್ ಮತ್ತು ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಮೂರ್ಬದಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹಲವಾರು ಅರಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದರು.

ಮಾಹಿತಿ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ ಸೆಲೆಗಳು :

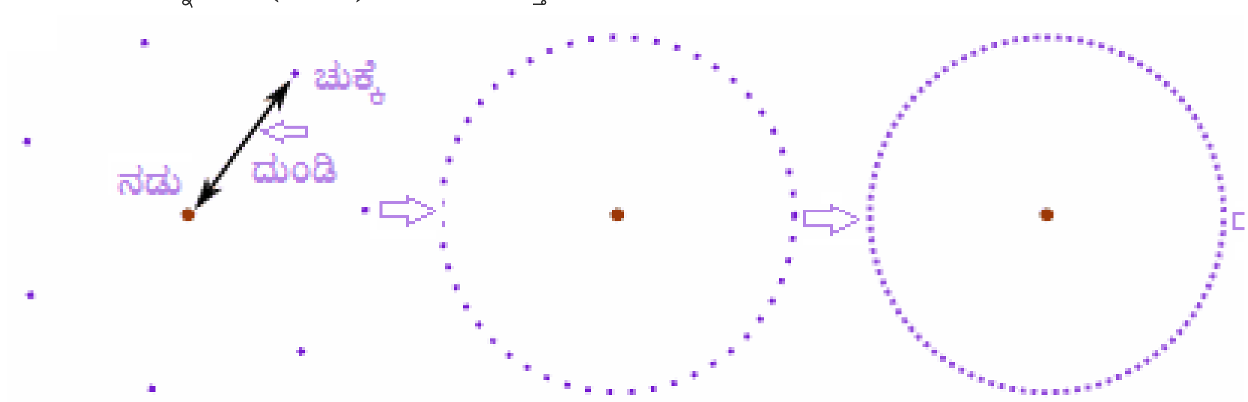
mathsisfun.com, *mathalino.com*, *wyzant.com*, *jwilson.coe.uga.edu*, *padmad.org*, *coolmath.com*, *4.bp.blogspot.com*, *faculty.wlc.edu)*

2. ದುಂಡುಕ

ನಾವು ದಿನಾಲೂ ದುಂಡಾಗಿರುವ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾ ಇರುತ್ತೇವೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬೈಕಿನ ಚಕ್ರಗಳು, ಊಟದ ತಟ್ಟೆಗಳು, ಡಬ್ಬಿಗಳು, 1-2 ರೂಪಾಯಿಯ ಚಿಲ್ಲರೆಗಳು, ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ದುಂಡಾಕಾರವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತವೆ. ಅಷ್ಟೇ ಏಕೆ ನಮ್ಮ ಕಣ್ಣುಗುಡ್ಡೆಯಿಂದ ಹಿಡಿದು ಭೂಮಿ, ಸೂರ್ಯ, ಚಂದ್ರ ಎಲ್ಲವೂ ದುಂಡಗಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿವೆ!.

ದುಂಡಾಕಾರಗಳ ಮೂಲ ದುಂಡುಕದ (Circle) ಬಗ್ಗೆ ಈ ಬರಹದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

- ದುಂಡುಕವು ಚುಕ್ಕೆಗಳಿಂದಾದ ಒಂದು ತಿರುವುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ.
- ಇದೊಂದು ಸಮತಟ್ಟಾದ (planar) ಮುಚ್ಚಿದ ಆಕೃತಿ.
- ದುಂಡುಕದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಚುಕ್ಕೆಗಳು, ದುಂಡುಕದ ನಡುವಿನಿಂದ ಸರಿ ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ (Equidistance). ಈ ಸರಿದೂರವನ್ನು **ದುಂಡಿ (radius)** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

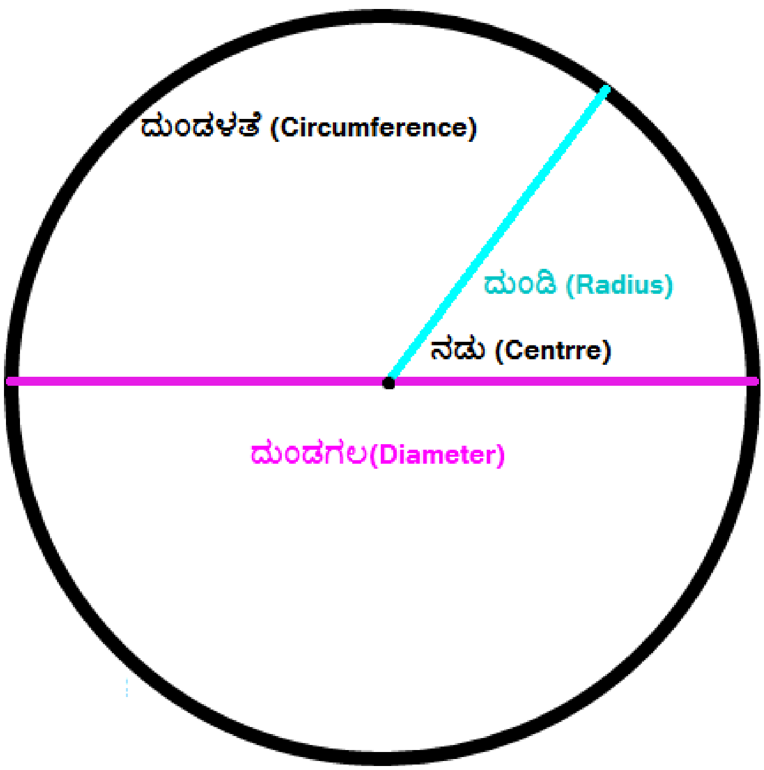


ದುಂಡುಕದ ಮುಖ್ಯ ಭಾಗಗಳು.

ನಡು (Centre): ದುಂಡುಕದ ನಟ್ಟ ನಡುವಿನ ಭಾಗವಿದು.

ದುಂಡಗಲ (Diameter): ದುಂಡುಕದ ನಡುವಿನ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಬದಿಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಗೆ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೆರೆಗೆ ದುಂಡಗಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದು ದುಂಡುಕದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಚುಕ್ಕೆಗಳ ನಡುವೆ ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಉದ್ದವಾದ ಗೆರೆ. ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಷಯವೆಂದರೆ ದುಂಡಗಲವು (diameter), ದುಂಡಿಯ (radius) ಎರಡುಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

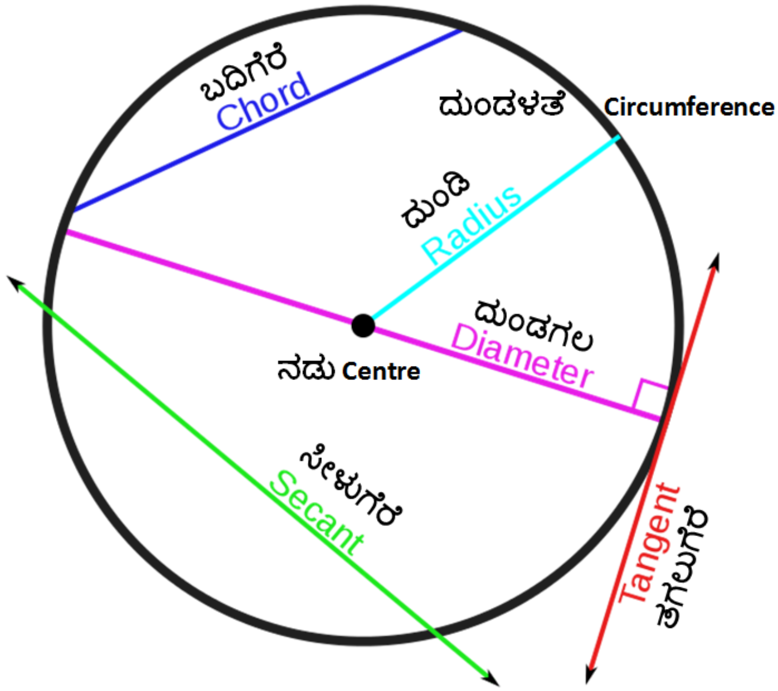
ದುಂಡಳತೆ (Circumference): ದುಂಡುಕದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ದುಂಡಳತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

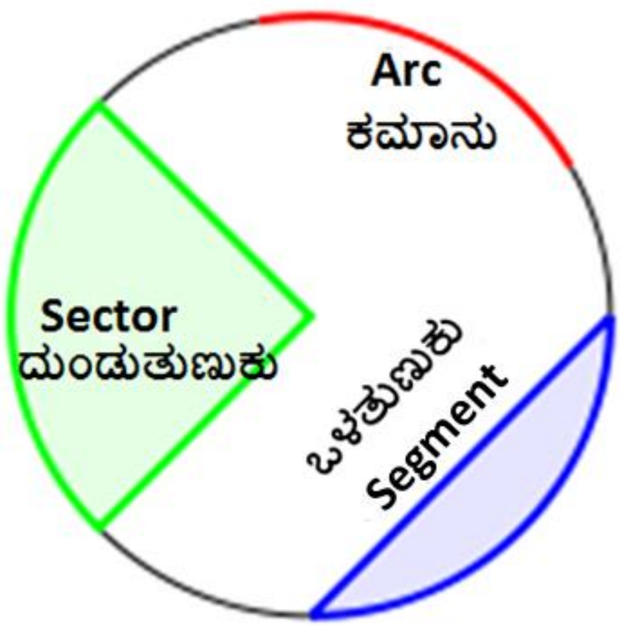


ದುಂಡುಕದ ಇತರ ಭಾಗಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ,

- **ಬದಿಗೆರೆ (Chord):** ದುಂಡುಕದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಗೆರೆ ಇದು. ಗಮನಿಸಿ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ದುಂಡಗಲ ಕೂಡ ಒಂದು ಬದಿಗೆರೆ.
- **ಸೀಳುಗೆರೆ (Secant):** ದುಂಡುಕವನ್ನು ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಸೀಳಿ ಹೊರಗೆ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಬದಿಗೆರೆಯನ್ನು ಸೀಳುಗೆರೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ತಗಲುಗೆರೆ (Tangent):** ದುಂಡುಕದ ಹೊರಗಿನ ಯಾವುದೇ ಬದಿಗೆ ತಗಲಿಕೊಂಡಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ತಗಲುಗೆರೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- **ಕಮಾನು (Arc):** ದುಂಡಳತೆಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತುಣುಕನ್ನು ಕಮಾನು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ದುಂಡುತುಣುಕು (Sector):** ಎರಡು ದುಂಡಿಗಳು ಕಮಾನಿನ ಜೊತೆ ಸೇರುವ ಜಾಗವನ್ನು ದುಂಡುತುಣುಕು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

- **ಒಳತುಣುಕು (Segment):** ನಡುವೊಂದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ದುಂಡುಕದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಚುಕ್ಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿದ ಒಳ ಭಾಗವನ್ನು ಒಳತುಣುಕು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.



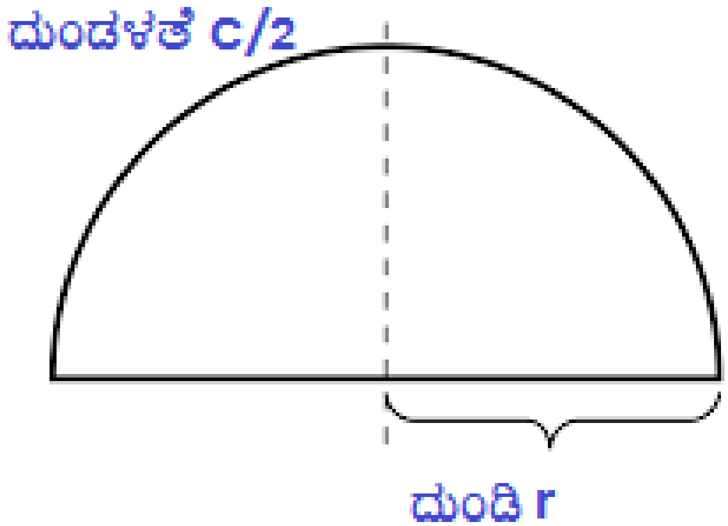


ಮೇಲಿನ ಭಾಗಗಳ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷತೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ,

- ಎರಡು ಬದಿಗೆರೆಗಳು (chords) ದುಂಡುಕದ ನಡುವಿನಿಂದ ಸರಿ ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

- ದುಂಡುಕದ ನಡುವಿನಿಂದ ಬದಿಗೆರೆಗೆ ಎಳೆದ ನೇರಡ್ಡ (perpendicular) ಗೆರೆಯು ಬದಿಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಪಾಲಾಗಿ ಇಬ್ಬಾಗಿಸುತ್ತದೆ
- ದುಂಡಗಲವು (diameter) ದುಂಡುಕದ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಬದಿಗೆರೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ದುಂಡುಕದ ತಗಲುಗೆರೆಗೆ (Tangent) ನೇರಡ್ಡವಾಗಿ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯು ದುಂಡುಕದ ನಡುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಸರಿಪಾಲು ದುಂಡುಕ (Semi Circle): ದುಂಡುಕದ ಒಟ್ಟು ಹರವಿನ (Area) ಅರ್ಧಭಾಗವನ್ನು ಸರಿಪಾಲು ದುಂಡುಕ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಗಮನಿಸಿ, ಅದರ ದುಂಡಳತೆಯೂ ಒಟ್ಟು ದುಂಡಳತೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.



ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ದುಂಡುಕದ ಭಾಗಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಅಳತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮುನ್ನ, ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹಲವೆಡೆ ಬಳಕೆಯಾಗುವ **π** (ಪೈ) ಬಗ್ಗೆ ಚುಟುಕಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ದುಂಡಳತೆಯನ್ನು (circumference) ದುಂಡಗಲದಿಂದ (diameter) ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ***π*** *(ಪೈ) ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.*

π ಹಲವು ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ,

- *π* ಒಂದು ನೆಲೆಬೆಲೆ (constant value). ಅಂದರೆ ದುಂಡುಕವು ಚಿಕ್ಕದು, ದೊಡ್ಡದು, ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯದ್ದಾಗಿರಲಿ *π* ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.
- *π* ಒಂದು ಕಟ್ಟಲೆತಪ್ಪಿದ ನೆಲೆಬೆಲೆ (Irrational constant) ಅಂದರೆ ಇದರ ಬೆಲೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. ಅದರ ಪಾಲುಗಳು (fractions) ಕೊನೆಗೊಳ್ಳದೇ ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತವೆ, 3.14159265358979323846264338… (ಹೆಚ್ಚಿನ ಕಡೆ ಪಾಲುಗಳನ್ನು ಮೊಟಕುಗೊಳಿಸಿ 3.142 ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.)

ಈಗ ದುಂಡುಕದ ಭಾಗಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರತ್ತ ಮುನ್ನಡೆಯೋಣ,

ದುಂಡುಕದ ದುಂಡಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ:

ದುಂಡುಕದ ದುಂಡಳತೆ (circumference) = C, ದುಂಡಗಲ (diameter) = d ಮತ್ತು ದುಂಡಿ (radius) = r ಎಂದಾಗಿರಲಿ

ಈ ಮುಂಚೆ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಂತೆ, π ಬೆಲೆಯು ದುಂಡುಕದ ದುಂಡಳತೆಯನ್ನು (C) ದುಂಡಗಲದಿಂದ (d) ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ದುಂಡಿಯು (r) ದುಂಡಗಲದ (d) ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ,

$\pi = c / d$ … (1)

$d = 2 * r$ … (2)
ಹಾಗಾಗಿ ದುಂಡುಕದ ದುಂಡಳತೆಯ ನಂಟು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ,

$c = \pi * d$ *(ಸಾಟಿಕೆ 1 ರಿಂದ)*

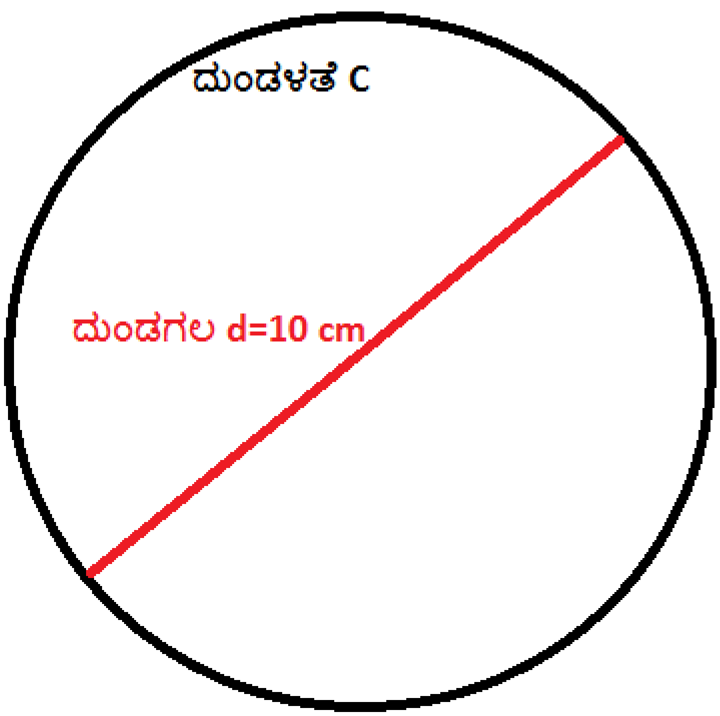
$c = \pi * 2 * r$ *(ಸಾಟಿಕೆ 1 ಮತ್ತು 2 ರಿಂದ)*

$c = 2\pi r = \pi d$ *(ಏಕೆಂದರೆ 2r = d)*

ಹಾಗಾಗಿ

ದುಂಡಳತೆ = 2 * π * ದುಂಡಿ = π * ದುಂಡಗಲ

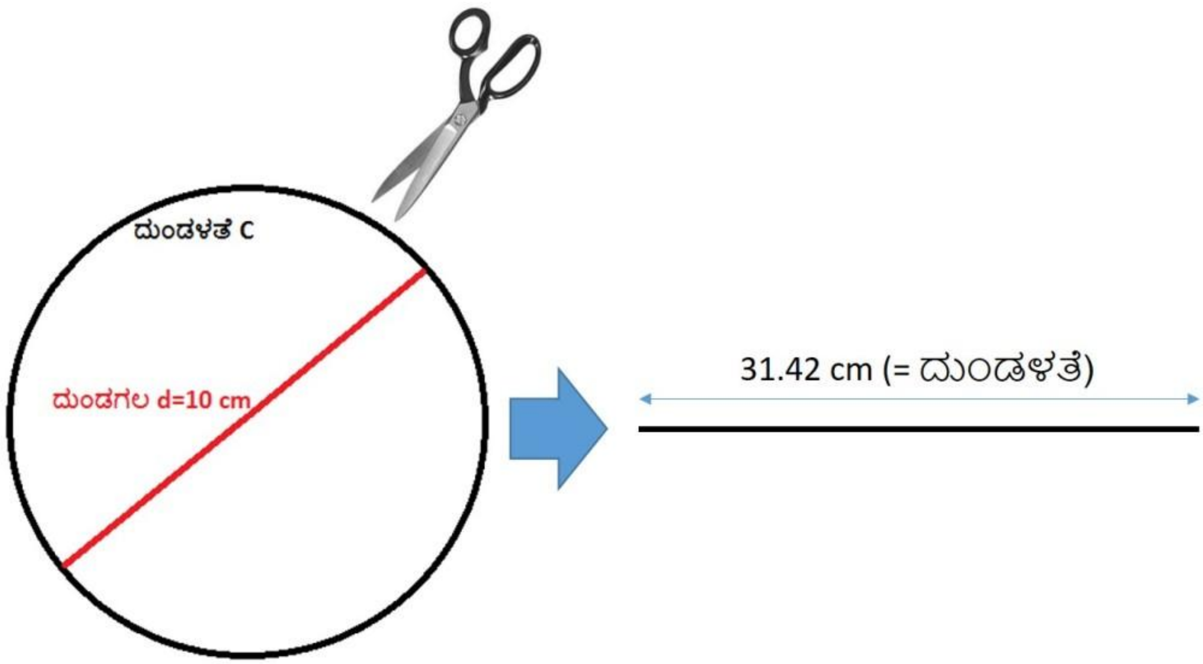
ಉದಾಹರಣೆ:



ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ದುಂಡಗಲ (d) =10 cm

ಹಾಗಾಗಿ, ದುಂಡಳತೆ (c) = $\pi * 10 = 3.142 * 10 = 31.42$ cm

ಗಮನಿಸಿ, 10 cm ದುಂಡಗಲ ಹೊಂದಿರುವ ಮೇಲಿನ ದುಂಡುಕವನ್ನು ಒಂದೆಡೆ ಕತ್ತರಿಸಿ, ಬಿಚ್ಚಿ ಹರಡಿದರೆ ಅದರ ಉದ್ದವು 31.42 cm ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



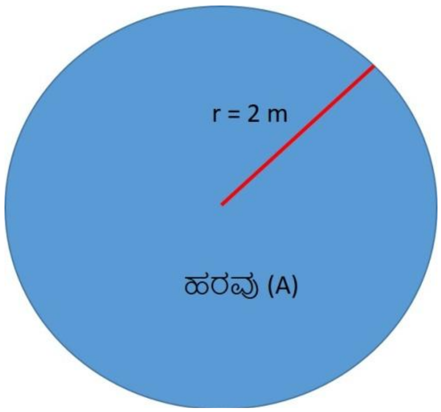
ದುಂಡುಕದ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ:

ನಾವು ಅವರಿವರ ಜಮೀನು ಒಂದು ಎಕರೆ-ಎರಡು ಎಕರೆ ಇದೆ ಅಂತ ಕೇಳುತ್ತಿರುತ್ತೇವಲ್ಲವೇ, ಈ ಎಕರೆ (Acre), ಸ್ಕ್ವೇರ್ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಸ್ಕ್ವೇರ್ ಕಿಲೋಮೀಟರ್ ಎಂಬುವುದು ಜಾಗ ಹರಡಿಕೊಂಡ ಹರವು (Area), ಹಾಗೆಯೇ ದುಂಡುಕದ ಹರವನ್ನು ಕೂಡ ಅಳೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ದುಂಡುಕದ ದುಂಡಿಯನ್ನು r ಮತ್ತು ದುಂಡುಕದ ಒಟ್ಟು ಹರವನ್ನು(A) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ದುಂಡುಕದ ಹರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಗಣಿತದ ನಂಟಿನಿಂದ ಅಳೆಯಬಹುದು,

$\mathbf{A = \pi * r^2}$

ಉದಾಹರಣೆ:



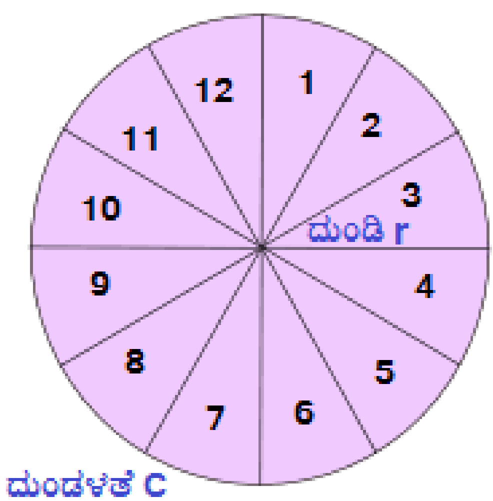
ದುಂಡಿ r = 2 m ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆಗ ದುಂಡುಕದ ಹರವು $A = \pi * r^2 = \pi * 2^2 = 3.142 \times 4 = 12.57\ m^2$

ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಗಣಿತದ ನಂಟು, $A = \pi * r^2$ ನ್ನು ಗೊತ್ತಿರುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಗೆಗಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಹಲವು ಬಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇಂತಹ ಒಂದು ಸುಲಭವಾದ ಬಗೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

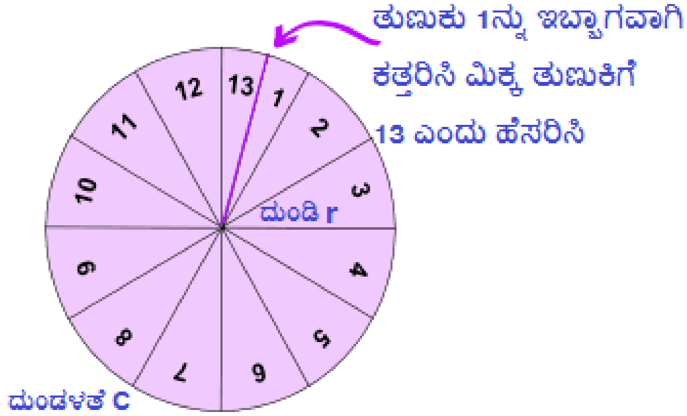
ಚಿತ್ರ 1 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ದುಂಡುಕವನ್ನು **12** ಪಾಲು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ (ನಮಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುವ ತರಹ ಇದನ್ನು ಪಾಲು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು, ಇಲ್ಲಿ **12**ಪಾಲು ಮಾಡಿದ್ದು ಉದಾಹರಣೆಯಷ್ಟೇ).

ದುಂಡುಕದ ದುಂಡಿಯನ್ನು **r** ಮತ್ತು ದುಂಡಳತೆ ***C*** ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.



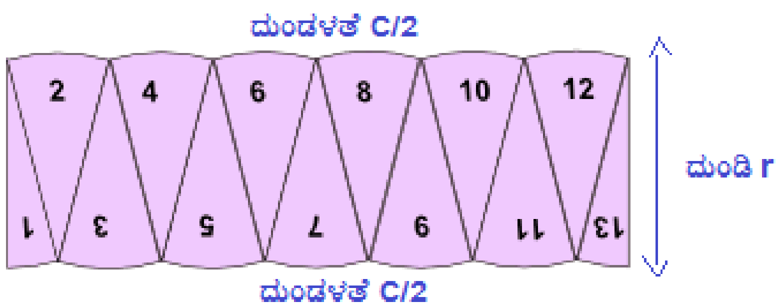
(ಚಿತ್ರ 1)

ಈಗ ಚಿತ್ರ 2 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ದುಂಡುಕದ ತುಣುಕು **1** ನ್ನು ಇಬ್ಬಾಗಿಸಿ, ದೊರೆತ ತುಣುಕನ್ನು **13** ಎಂದು ಹೆಸರಿಸೋಣ.



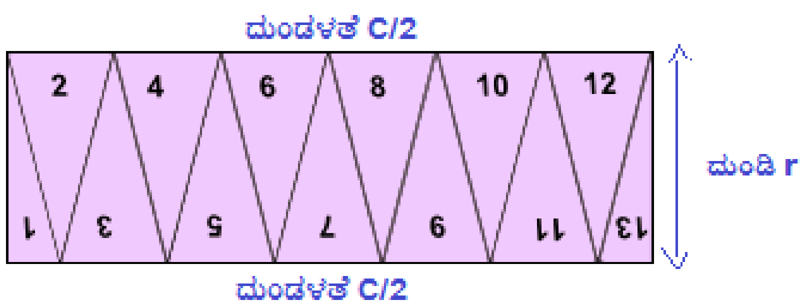
(ಚಿತ್ರ 2)

ಚಿತ್ರ 2 ರಲ್ಲಿರುವ ತುಣುಕುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 3 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.



(ಚಿತ್ರ 3)

ಜೋಡಿಸಿದ ನಂತರ ಅದು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಚಿತ್ರ 4 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ನಾಲ್ನೇರಬದಿ (Rectangle) ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



(ಚಿತ್ರ 4)

ಚಿತ್ರ 4 ರಲ್ಲಿ ಕಾಣುವ ನಾಲ್ನೇರಬದಿಯ (Rectangle) ಎತ್ತರವು ದುಂಡಿ **r** ಆಗಿದೆ.

ದುಂಡಳತೆ **C,** ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಹಂಚಿಹೋಗಿದ್ದರಿಂದ ನಾಲ್ನೇರಬದಿಯ ಅಗಲವು **C/2** ಆಗಿದೆ.

ಅಗಲವನ್ನು ಎತ್ತರದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ನಾಲ್ನೇರಬದಿಯ ಹರವು ನಮಗೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಈಗಾಗಲೇ ನಾವು ದುಂಡಳತೆ (C) ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ಮೇಲೆ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ದುಂಡುಕದ ಹರವಿನ ನಂಟನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ನಾಲ್ನೇರಬದಿಯ ಹರವು = ದುಂಡುಕದ ಹರವು =

*A = ಅಗಲ x ಎತ್ತರ = (C/2) * r = (2 πr / 2) * r (ಏಕೆಂದರೆ C = 2 πr)*
ಹಾಗಾಗಿ, ***ದುಂಡುಕದ ಹರವು (area of circle), A = π * r²***

ಈ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನೀವು ಕಾಗದದ ಹಾಳೆ ಇಲ್ಲವೇ ರಟ್ಟನ್ನು ದುಂಡಾಕಾರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಂಡು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು ಹಾಗೂ ದುಂಡುಕದ ಹರವಿನ (area) ಅಳತೆಯ ಜೊತೆ ದುಂಡುಕದ ತುಣುಕುಗಳಿಂದಾದ ನಾಲ್ನೇರಬದಿಯ (rectangle) ಹರವಿನ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಬಹುದು.

ದುಂಡುಕದ ಬಗ್ಗೆ ನಮಗಿದು ಗೊತ್ತಿರಲಿ:

- ಮನುಷ್ಯ ಸಾವಿರಾರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಚಕ್ರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದದ್ದು, ದುಂಡುಕದ ಅರಕೆಗೆ (research) ದಾರಿ ಮಾಡಿಕೊಟ್ಟಿತು.

- ಇಂಗ್ಲೀಶಿನ Circle (ಸರ್ಕಲ್) ಎಂಬ ಪದವು ಗ್ರೀಕಿನ krikos (ಕ್ರಿಕೋಸ್) ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಬಂದಿದೆ ಇದರ ಅರ್ಥ 'ಬಳೆ' ಇಲ್ಲವೇ 'ದುಂಡು' ಎಂದು.

- ದುಂಡಾಕಾರವು ಕಲ್ಲುಯುಗದ ಕಾಲದಿಂದ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದೆ. ಕಲ್ಲುಯುಗದ ಹಲಾವಾರು ಸಲಕರೆಣೆಗಳು ಈ ಆಕಾರದಲ್ಲಿವೆ.
- ಗ್ರೀಕಿನ ಬಾನರಿಗ ಮತ್ತು ಎಣಿಕೆಯರಿಗ ಪ್ಲೇಟೋ (400 BCE) ಬರೆದ ಸವೆಂತ್ ಲೆಟರ್ (Seventh letter) ಹೊತ್ತಗೆಯಲ್ಲಿ ದುಂಡುಕದ ಬಗ್ಗೆ ಬಿಡಿಸಿ ಹೇಳಿದ್ದಾನೆ.
- ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ನ ಮೂರನೇ ಹೊತ್ತಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್ (Euclid's elements) ದುಂಡುಕದ ಹುರುಳುಗಳನ್ನು ಹೇಳುತ್ತದೆ.
- ಸುಮಾರು 200 BCE ಯಲ್ಲಿ ಬಾಳಿದ ಗ್ರೀಕಿನ ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್ ಎಂಬ ಎಣಿಕೆಯರಿಗ ದುಂಡುಕದ ಕುರಿತು ಹಲವಾರು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾನೆ. ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ದುಂಡುಕದ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆಯು ಇಂತಹ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲೊಂದು.

***ಬರಹದ ಸೆಲೆಗಳು:** jwilson.coe.uga.edu, wikipedia, mathsisfun.com, perseus.tufts.edu)*

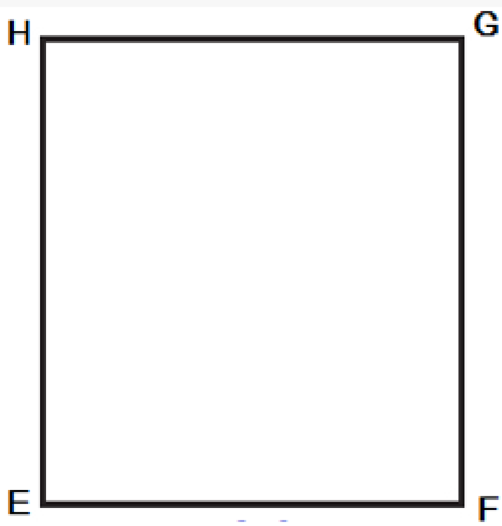
***ಚಿತ್ರ ಸೆಲೆಗಳು:** mathsisfun.com, wikipedia)*

3. ಚೌಕ

ನಾವಾಡುವ ಚೆಸ್ ಆಟದ ಮಣೆ, ಮನೆಯ ಟೈಲ್ಸ್ ಗಳು, ಹಾವು ಏಣಿ ಆಟದ ದಾಳ, ಅಂಚೆ ಚೀಟಿಗಳು ಇವೆಲ್ಲವೂ '**ಚೌಕ**'ಗಳಾಗಿವೆ

ನಮ್ಮ ದಿನದ ಬದುಕಿನಲ್ಲಿ ಹಾಸುಹೊಕ್ಕಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ಬಗ್ಗೆ ಈ ಬರಹದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಚೌಕವು ನಾಲ್ಕು ಸರಿಯಳತೆಯ (Congruent) ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಆಕೃತಿ.

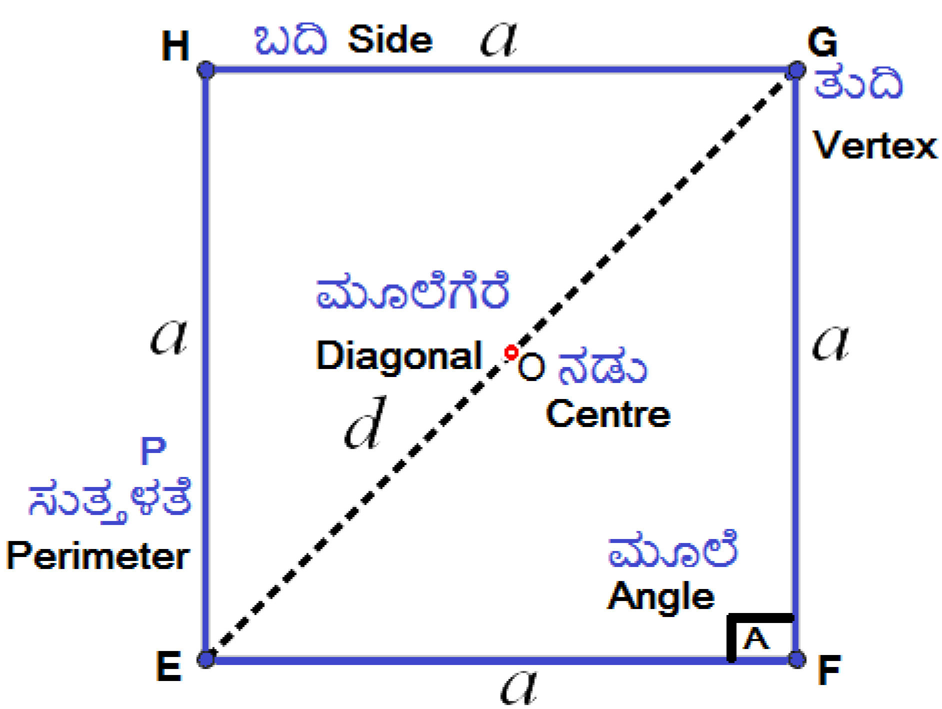


ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಚೌಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬದಿಗಳಾದ **EF, FG, GH** ಮತ್ತು **HE** ಗೆರೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಹಾಗೆನೇ ಚೌಕವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

- ಚೌಕವು ಸಮತಟ್ಟಾದ (planar) ಮುಚ್ಚಿದ ಆಕೃತಿಯಾಗಿದೆ (Closed Shape)
- ಚೌಕವು ನಾಲ್ಬದಿ (Quadrilateral) ಆಕೃತಿಯ ಒಂದು ಬಗೆಯಾಗಿದೆ.
- ಚೌಕದ ಜೋಡಿ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ನೇರಡ್ಡವಾಗಿರುತ್ತವೆ (Perpendicular to each other)

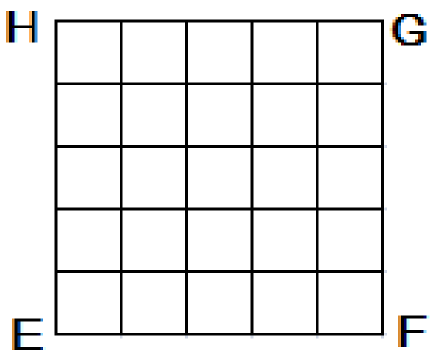
ಚೌಕದ ಮುಖ್ಯ ಭಾಗಗಳು.

- **ಬದಿ (Side):** ಚೌಕ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಬದಿಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ತುದಿ (Vertex):** ಚೌಕದ ಎರಡು ಬದಿಗಳು ಸೇರುವೆಡೆಯನ್ನು ತುದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ಮೂಲೆಗೆರೆ (Diagonal):** ಚೌಕದ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಿಂದ ಅದರ ಎದುರು ಮೂಲೆಗೆ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯೇ ಮೂಲೆಗೆರೆ.
- **ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter):** ನಾಲ್ಕು ಬದಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದವನ್ನು ಸುತ್ತಳತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ಮೂಲೆ (Angle):** ಎರಡು ಜೋಡಿ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸೇರಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಎಡೆಯನ್ನು ಮೂಲೆ ಇಲ್ಲವೇ ಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ನಡು (Centre):** ಎರಡು ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ಸೇರುವ ಚುಕ್ಕೆಯನ್ನು ನಡು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಚೌಕದ ನಟ್ಟನಡುವಿನ ಭಾಗವಾಗಿದ್ದು, ಎಲ್ಲ ಮೂಲೆಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.



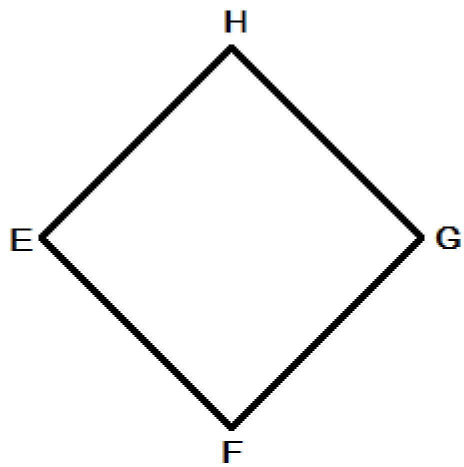
ಚೌಕದ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷತೆಗಳು:

- ಎರಡು ಜೋಡಿಗೆರೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ನೇರಡ್ಡವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಮೂಲೆಗಳ ಕೋನ (Angle) **90°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ನಡುವಿನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವೂ (Angle) **90°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಚೌಕ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಎರಡು ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.
- ಚೌಕ ಆಕೃತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಳತೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ (congruent).
- ಚೌಕ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಿಗಳ ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಅದರ ಮೂಲೆಗೆರೆಯ ಉದ್ದವು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.
- ಚೌಕದ ಮೂಲೆಗೆರೆಯು ಅದರ ಒಂದು ಬದಿಗಿಂತ **√2** ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಸುಮಾರು 1.414 ಪಟ್ಟಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಬದಿ (Quadrilateral) ಆಕೃತಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಚೌಕದ ಹರವು (Area) ನಾಲ್ಬದಿ ಆಕೃತಿಯ ಹರವಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿರುತ್ತದೆ.
- ಚೌಕ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಸರಿಪಾಲಾಗಿ ಸೀಳಿದಾಗ ಅದರ ಒಳಪಾಲುಗಳೂ ಚೌಕ ಆಕೃತಿಯಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಚೌಕ **EFGH** ನ್ನು ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಉದ್ದವಾಗಿ ಐದು ಪಾಲು ಮಾಡೋಣ. ನಾವೀಗ ಇದರಲ್ಲಿ **25** ಚಿಕ್ಕ ಚಿಕ್ಕ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.



- ಚೌಕವು ಆಯತದ (Rectangle) ಒಂದು ಬಗೆಯೂ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಸರಿಯಳತೆಯಲ್ಲಿರುವ ಆಯತವು ಚೌಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಚೌಕವು ಒಂದು ನಾಲ್ಮಟ್ಟವಾಗಿದೆ (Parallelogram), ಅಂದರೆ ಅದರ ಎದುರು ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮನಾಂತರವಾಗಿವೆ (Parallel to each other).

❖ ಚೌಕವನ್ನು ಓರೆಯಾಗಿ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಅದು ಒಂದು ಹರಳಾಕೃತಿಯಾಗುತ್ತದೆ (Rhombus).

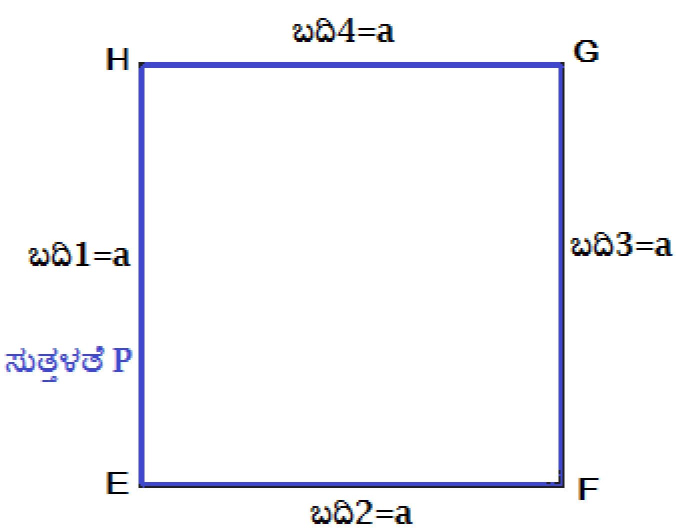


❖ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವಂತೆ ಚೌಕದ ಮೂಲೆಯೊಂದರ ಕೋನ **90°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗಾಗಿ ಇದರ ಮೂಲೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಕೋನ **360°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ (perimeter):

ಈಗ ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಚೌಕದ ಬದಿ (Side) = **a**, ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter) = **P** ಎಂದಾಗಿರಲಿ,

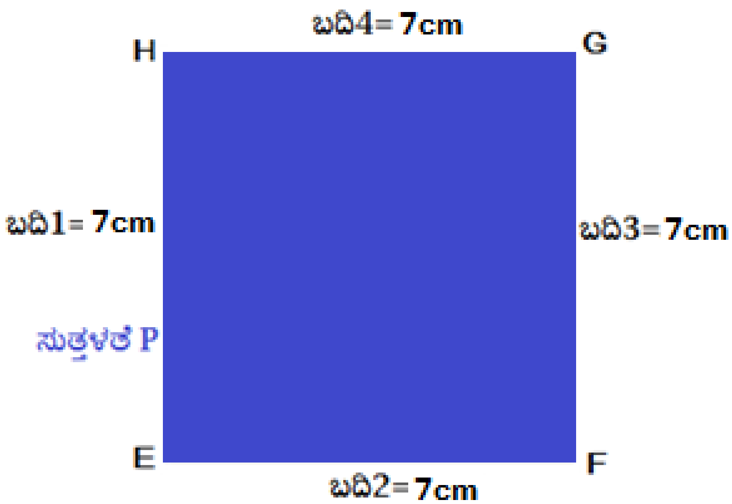


ಮೇಲೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಚೌಕವು ಒಟ್ಟು ನಾಲ್ಕು ಸರಿಯಳತೆಯುಳ್ಳ ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ

P = ಬದಿ1 + ಬದಿ2 + ಬದಿ3 + ಬದಿ4 = HE + EF + FG + GH = a + a + a + a = 4 x a = 4a

ಸುತ್ತಳತೆ P = 4a

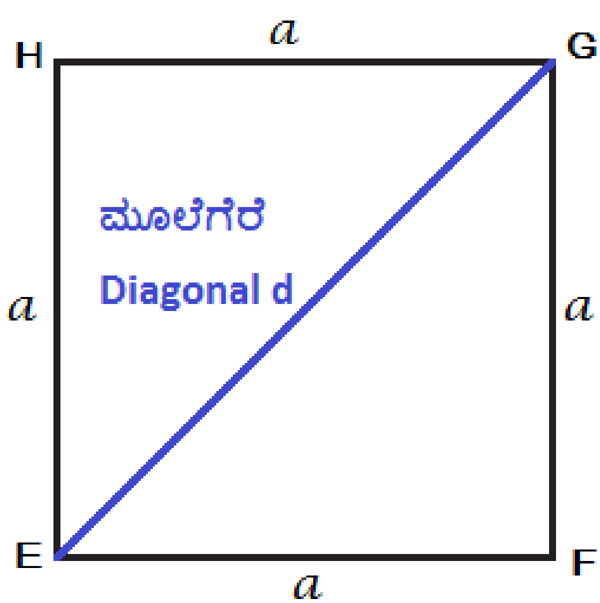
ಉದಾಹರಣೆ: ಚೌಕ EFGH ಬದಿಯ ಉದ್ದ a = 7cm ಆಗಿರಲಿ, ನಾವೀಗ ಇದರ ಸುತ್ತಳತೆ P ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.



ಸುತ್ತಳತೆ P = 4a = 4 x a = 4 x 7 = 28cm;

ಸುತ್ತಳತೆ P = 28cm

ಮೂಲೆಗೆರೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ.



ಮೂಲೆಗೆರೆ (Diagonal) = EG = d , ಬದಿಗಳು (Sides) = EF + FG = GH = HE = a ಆಗಿರಲಿ.

ಮೂಲೆಗೆರೆ EG ಯು ಚೌಕವನ್ನು ಎರಡು ಮೂರ್ಬದಿಗಳನ್ನಾಗಿ (Triangle) ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ, ಹಾಗಾಗಿ ನಮಗೆ EGH ಮತ್ತು EFG ಎಂಬ ಎರಡು ಮೂರ್ಬದಿಗಳು ಕಾಣಸಿಗುತ್ತವೆ.

ನಾವು ಇದರಲ್ಲಿ EFG ಮೂರ್ಬದಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ, ಈ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಬದಿ EF = a, FG = a ಮತ್ತು GE = d ಆಗಿವೆ.

ನಾವಿಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಸಂಗತಿ ಏನೆಂದರೆ EF ಮತ್ತು FG ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ನೇರಡ್ಡವಾಗಿವೆ (Perpendicular), ಆದ್ದರಿಂದ EFG ಒಂದು ಸರಿಮೂಲೆಯ ಮೂರ್ಬದಿಯಾಗಿದೆ (Right Angle Triangle). ಇದರಲ್ಲಿ GE ಯು ಉದ್ದಬದಿ (Hypotenuse)=d ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಕಟ್ಟಲೆಯ (Pythagoras Theoram) ಮೂಲಕ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಉದ್ದಬದಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ (Pythagoras Theorem):

ಸರಿಮೂಲೆ ಮೂರ್ಬದಿಯ (right angle triangle), ಉದ್ದಬದಿಯ ಇಮ್ಮಡಿಯು (Square of hypotenuse) ಉಳಿದ ಎರಡು ಬದಿಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $\mathbf{GE^2 = EF^2 + FG^2}$

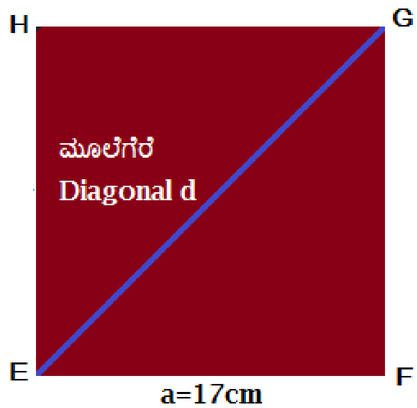
$\mathbf{d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2}$

ಎರಡು ಕಡೆ ಇಮ್ಮಡಿ ಮೂಲವನ್ನು (Square root) ತೆಗೆದಾಗ $d = \sqrt{2} \times a = \sqrt{2}a$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ EFG ಮೂರ್ಬದಿಯ ಉದ್ದಬದಿಯು (Hypotenuse of a triangle) ಚೌಕದ ಮೂಲೆಗೆರೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ (Diagonal of a Square) ಮೂಲೆಗೆರೆ GE ಯ ಉದ್ದ $d = \sqrt{2}a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ:

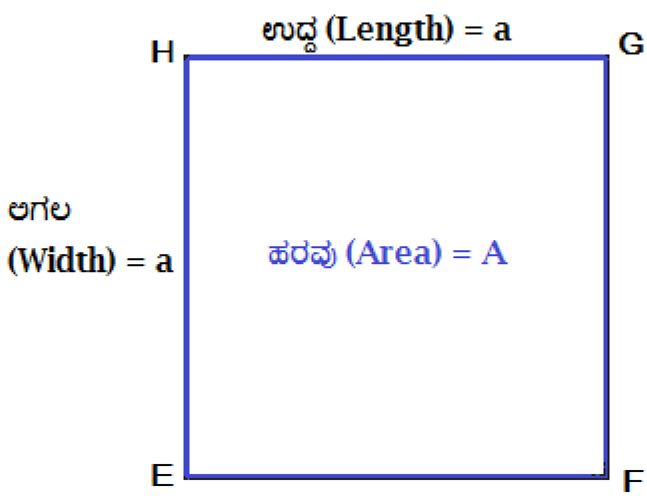
EFGH ಎಂಬ ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿಯ ಉದ್ದ EF = a = 17cm ಆಗಿರಲಿ, ಇದರಿಂದ ಮೂಲೆಗೆರೆ GEಯ ಉದ್ದ d ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.



ಮೂಲೆಗೆರೆ GE ಯ ಉದ್ದ d = $\sqrt{2}$ x a = $\sqrt{2}$ x 17 = 1.41 x 17= 24.04 cm

ಚೌಕದ ಹರವನ್ನು (area) ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ.

ಅಗಲವನ್ನು ಉದ್ದದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಆಯತದ (rectangle) ಹರವು ನಮಗೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಚೌಕವೂ ಒಂದು ಆಯತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಚೌಕದ ಹರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.



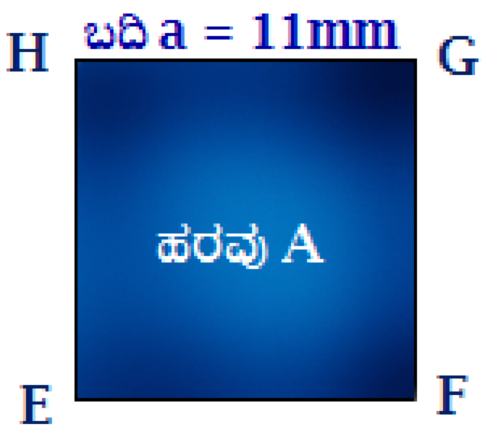
ಬದಿ EH = a ಚೌಕದ ಅಗಲವಾಗಿರಲಿ , HG = a ಚೌಕದ ಉದ್ದವಾಗಿರಲಿ, ಹರವು (Area)=A ಆಗಿರಲಿ.

ಹರವು (Area) = A = ಉದ್ದ x ಅಗಲ = HG x EH = a x a = a^2

ಹರವು A = a^2

ಉದಾಹರಣೆ 1:

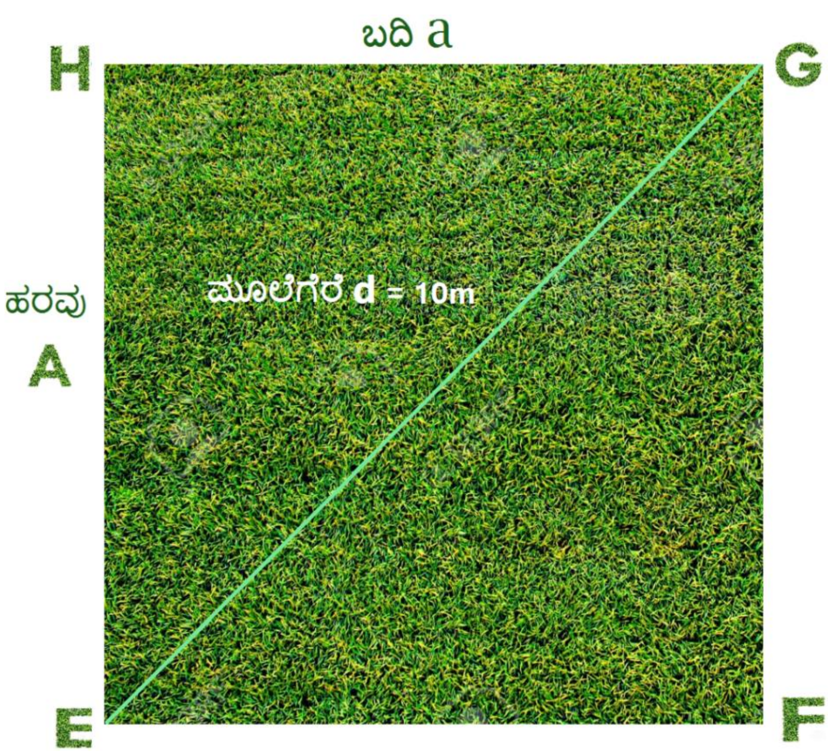
ಒಂದು ಚೌಕ ಆಕಾರದ ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ ಬಿಡಿ ಹಾಸುಗಲ್ಲಿನ ಬದಿ a = 11mm ಆದಾಗ ಚೌಕದ ಹರವು A ಅನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.



ಹರವು A = a^2 = 11^2 = 121 mm^2

ಉದಾಹರಣೆ 2:

ಚೌಕ ಆಕಾರದ EFGH ಎಂಬ ಒಂದು ಹಸಿರು ಹುಲ್ಲಿನ ಗದ್ದೆಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲೆಗೆ 10 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿದೆ, ಇದರಿಂದ ನಾವು ಈ ಗದ್ದೆಯು ಎಷ್ಟು ಹರವಿಕೊಂಡಿದೆ (Area occupied) ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.



ಮೂಲೆಗೆರೆ GE = d = 10m ಆಗಿದೆ.

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಮೂಲೆಗೆರೆಯ ಉದ್ದ d = $\sqrt{2}a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ

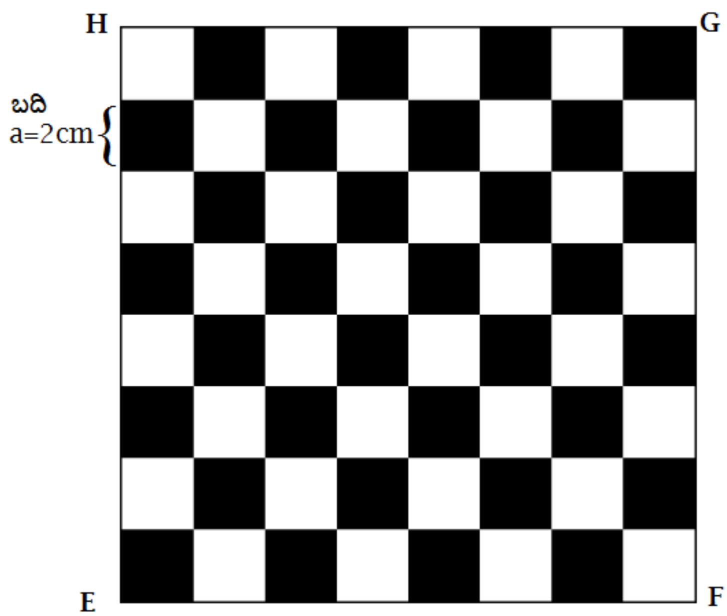
ಮೇಲಿನ ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಕಟ್ಟಲೆಯಿಂದ $GE^2 = EF^2 + FG^2 = d^2 = 2a^2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $a^2 = d^2/2$, ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವಂತೆ ಚೌಕದ ಹರವು $A = a^2$

ಆದ್ದರಿಂದ ಹಸಿರು ಹುಲ್ಲಿನ ಗದ್ದೆಯ ಹರವು $A = a^2 = d^2/2 = 10^2/2 = 100/2 = 50\ m^2$ ಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 3:

EFGH ಚೆಸ್ ಆಟದ ಮಣೆಯ ಒಂದು ಮನೆಯ ಬದಿಯ ಉದ್ದ 2cm, ಇದರಿಂದ ನಾವು ಇಡೀ ಚೆಸ್ ಆಟದ ಮಣೆಯ ಹರವನ್ನು (Area) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.



ಮನೆಯ ಒಂದು ಬದಿ = a = 2cm ಹರವು = A ಆಗಿರಲಿ.

ಚೆಸ್ ಮಣೆಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಮನೆಗಳು ಮತ್ತು ಇಡೀ ಚೆಸ್ ಮಣೆ ಚೌಕ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಚೆಸ್ ಮಣೆಯ ಒಂದು ಬದಿಯು ಒಟ್ಟು 8 ಮನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಚೌಕದ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ ಎಲ್ಲಾ ಎಂಟು ಮನೆಗಳ ಒಂದು ಬದಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

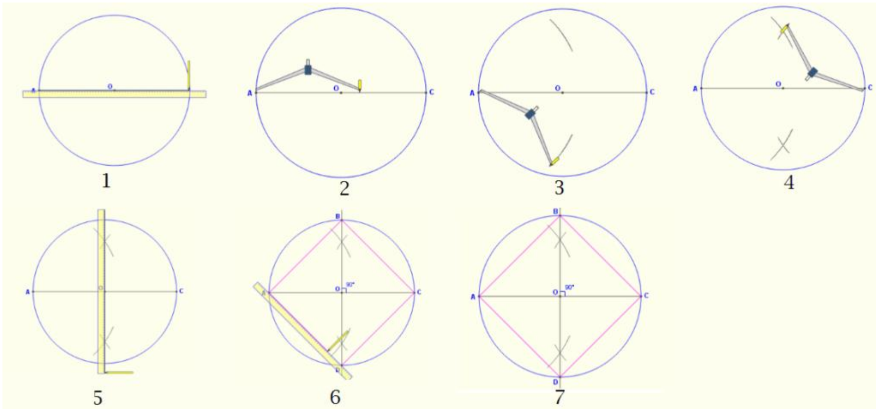
ಬದಿ EF = FG = GH = HE = 8 x a = 8a = 8 x 2 = 16 cm ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವಂತೆ ಚೌಕದ ಹರವು $A = (\text{ಬದಿ})^2 = 16^2 = 256\ cm^2$

ಆದ್ದರಿಂದ ಚೌಕದ ಹರವು $A = 256\ cm^2$

ಚೌಕ ಬಿಡಿಸುವ ಆಟ:

ನೀವು ಚಂದವಾದ ಮತ್ತು ಕರಾರುವಕ್ಕಾದ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕೇ? ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಂತೆ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಮೂಡಿಸಿ ನೋಡಿ.

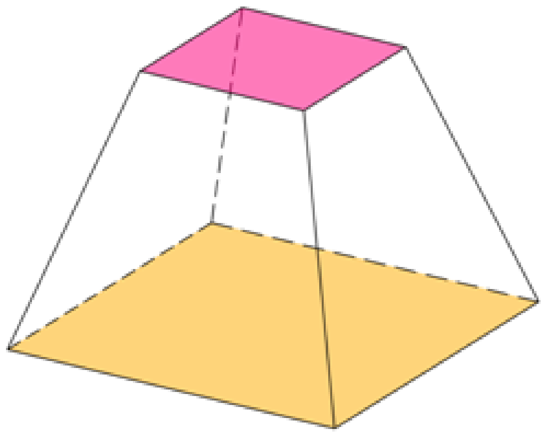


ಮೂಡಿಸುವ ಬಗೆ:

1. ಕೈವಾರವನ್ನು (Geometric Compass) ಒಂದು ಸುತ್ತುಹಾಕಿ ಒಂದು ದುಂಡುಕವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ, ನಂತರದಲ್ಲಿ ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಒಂದು ದುಂಡಗಲದ (Diameter) ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದರ ನಡು (ಕೈವಾರದ ಮುಳ್ಳು ಚುಚ್ಚಿಸಿದ ಚುಕ್ಕೆ) **O** ಆಗಿರಲಿ, ದುಂಡಗಲದ ಒಂದು ಬದಿಗಳು **A** ಮತ್ತು **B** ಆಗಿರಲಿ. (**ದುಂಡುಕ1** ನೋಡಿ)
2. ಕೈವಾರದ ಮುಳ್ಳನ್ನು **A** ಚುಕ್ಕೆಯಲ್ಲಿಟ್ಟು ಕೈವಾರದ ಪೆನ್ಸಿಲ್ಲಿನಿಂದ ದುಂಡುಕದ ನಡುವಿನ ನಂತರದ ಮೇಲ್ಬಾಗದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಬಾಗದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾದರೂ ಒಂದು ಕಮಾನನ್ನು (Arc) ಎಳೆಯಿರಿ. ಕೈವಾರದ ಅದೇ ಅಳತೆಯನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅದೇ ರೀತಿ ಎದುರುಬದಿ **C** ಯಿಂದ ಮೇಲೆಕೆಳೆಗೆ ಇನ್ನೆರಡು ಕಮಾನುಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
(ದುಂಡುಕ2, ದುಂಡುಕ3, ದುಂಡುಕ4 ನೋಡಿ)
3. ಕಮಾನು ಕತ್ತರಿಸುವ ನಡುವಿಂದ ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ನಮಗೆ ದುಂಡುಕದ ಮೇಲೆ **A,B,C,D**ನಾಲ್ಕು ಚುಕ್ಕೆಗಳು ಮೂಡಿವೆ, ನಂತರದಲ್ಲಿ ದುಂಡುಕದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಚುಕ್ಕೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಚುಕ್ಕೆಗೆ ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಹೀಗೆ ನಮಗೊಂದು ಚೆಂದವಾದ ಚೌಕವು ಸಿಗುತ್ತದೆ.
(ದುಂಡುಕ5, ದುಂಡುಕ6, ದುಂಡುಕ7 ನೋಡಿ)

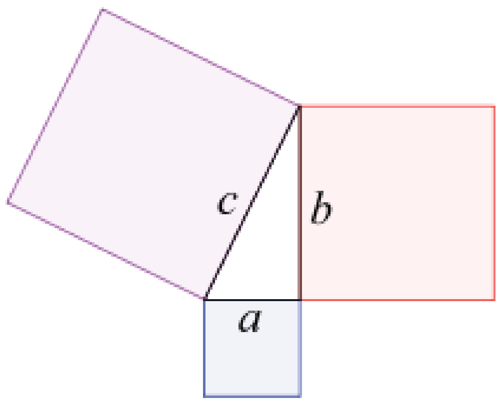
ಚೌಕದ ಹಳಮೆ:

- ಸುಮಾರು 4000 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಈಜಿಪ್ಟಿಯನ್ನರು ಹಲಾವಾರು ಮಟ್ಟಾಕೃತಿಯ (Frustum) ಪಿರಮಿಡ್ ಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದರು, ಮಟ್ಟಾಕೃತಿ ಅಂದರೆ ಬುಡದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಆಕಾರವಿರುತ್ತದೋ ತಲೆಯಲ್ಲಿ ಮಟ್ಟವಾದ ಅದೇ ಆಕಾರವಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದುದು ಚೌಕದ ಮಟ್ಟಾಕೃತಿ (Square Frustum)



.

- ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಗ್ರೀಕಿನ ಒಬ್ಬ ಎಣಿಕೆಯರಿಗರು, ಅವರ ಕಾಲ ಸುಮಾರು 500 BC. ಅವರು ತಮ್ಮ ಸರಿಮೂಲೆ ಮೂರ್ಬದಿಯ (Right Angle Triangle) ಕಟ್ಟಲೆಯನ್ನು ಒರೆಹಚ್ಚಲು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಿದ್ದರು.



ಪೈತಾಗೋರಸ್ ಕಟ್ಟಲೆ : $a^2 + b^2 = c^2$

(ಮಾಹಿತಿ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ ಸೆಲೆಗಳು: mathopenref.com, Wikipedia, newworldencyclopedia.org)

4. ನಾಲ್ಬದಿಗಳು– ಭಾಗ 1

ನಾವು ದಿನಾಲೂ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಬದಿ ಆಕಾರದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿರುತ್ತೇವೆ (Quadrilateral shaped objects), ಅವುಗಳೆಂದರೆ ನಾಲ್ಬದಿಯಾಕಾರದ ಕಟ್ಟಡಗಳು, ಆಟದ ಸಾಮಾನುಗಳು, ನಾಲ್ಬದಿಯಾಕಾರದ ಮೇಜುಗಳು, ಕಪಾಟುಗಳು, ಗಾಳಿಪಟಗಳು, ಟ್ರಾಫಿಕ್ ಗುರುತುಗಳು. ಮರೆತು ಬಿಡಬೇಡಿ, ನಾಲ್ಬದಿಯಾಕಾರದ ಚಾಕಲೇಟುಗಳೂ ಕೂಡ ಇವೆ!.

ಈ ಬರಹದಲ್ಲಿ ಬಗೆ ಬಗೆಯಾದ ನಾಲ್ಬದಿ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹಿರಿಮೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

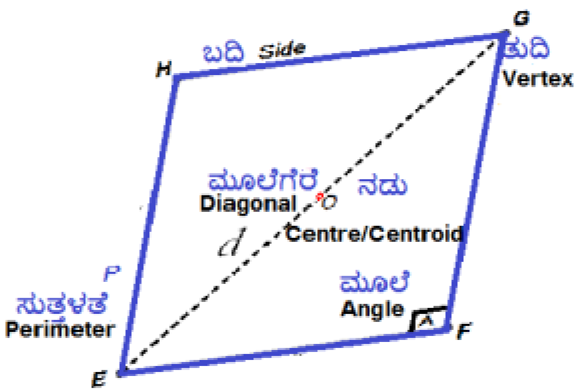
- ನಾಲ್ಬದಿ ಎನ್ನುವುದು ಕೇವಲ ನಾಲ್ಕು ಗೆರೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಸಮತಟ್ಟಾದ (planar) ಮುಚ್ಚಿದ ಆಕೃತಿಯಾಗಿದೆ (Closed Shape).
- ನಾಲ್ಬದಿಯು ಅದರ ಬದಿಗಳು ಹಾಗು ಮೂಲೆಗಳ ಅಳತೆಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಅದರ ಆಕಾರ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ನಾಲ್ಬದಿಯು ನಾಲ್ಕು ಬದಿಗಳು (Sides), ನಾಲ್ಕು ತುದಿಗಳು (Vertices) ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳನ್ನು (Angles) ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ನಾಲ್ಬದಿಯ ಮುಖ್ಯ ಭಾಗಗಳು.

- **ಬದಿ(Side):** ನಾಲ್ಬದಿ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಬದಿಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ತುದಿ(Vertex):** ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳು ಸೇರುವೆಡೆಯನ್ನು ತುದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ಮೂಲೆಗೆರೆ(Diagonal):** ನಾಲ್ಬದಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಿಂದ ಅದರ ಎದುರು ಮೂಲೆಗೆ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯೇ ಮೂಲೆಗೆರೆ.
- **ಸುತ್ತಳತೆ(Perimeter):** ನಾಲ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಕು ಬದಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದವನ್ನು ಸುತ್ತಳತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- **ಮೂಲೆ (Angle):** ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎರಡು ಜೋಡಿ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸೇರಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಎಡೆಯನ್ನು ಮೂಲೆ ಇಲ್ಲವೇ ಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

- **ನಡು (Centre or Centroid):** ಎರಡು ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ಸೇರುವ ಚುಕ್ಕೆಯನ್ನು ನಡು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದು ನಾಲ್ಬದಿಯ ನಡುವಿನ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

ನಾಲ್ಬದಿಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.



ನಾಲ್ಬದಿಯ ಬಗೆಗಳು.

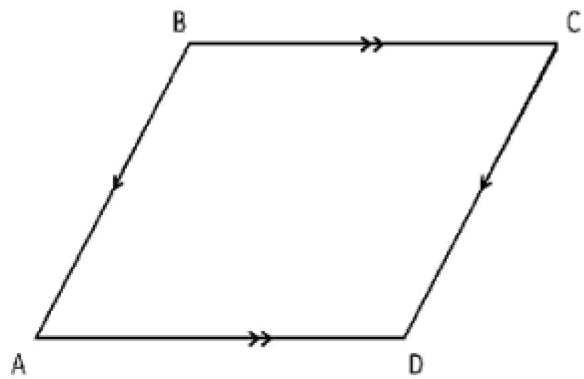
ನಾಲ್ಬದಿಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಗೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಬದಿ, ಮೂಲೆ ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳ ಮಾರ್ಪಾಟುಗಳ ಮೇಲೆ ಬೇರ್ಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಲವು ನಾಲ್ಬದಿಗಳ ಬಗೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಒಳ ಬಗೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಯೋಣ. ನಾಲ್ಬದಿಯ ಏರ್ಪಾಟುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ಗುರುತು	**ಹುರುಳು**
=	ಸರಿಯಾಗಿದೆ (Equal to)
≠	ಸರಿಯಾಗಿಲ್ಲ (Not equal to)
||	ಸಾಟಿಯಾಗಿದೆ (Parallel to)
∦	ಸಾಟಿಯಾಗಿಲ್ಲ (Not parallel to)
∠	ಮೂಲೆ (Angle)
°	ಮೂಲೆಯಳತೆ (Angle measurement)

I. ಸುಳುವಾದ ನಾಲ್ಬದಿಗಳು (Simple Quadrilaterals)

ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಸುಳುವಾಗಿ (Simple) ಜೋಡಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಬಂದರೆ ಅದು ಸುಳುವಾದ ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಸಾಟಿಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು (Parallelogram) ನೋಡಬಹುದು, ಇಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಬದಿಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ಅಡೆತಡೆ ಇಲ್ಲದೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

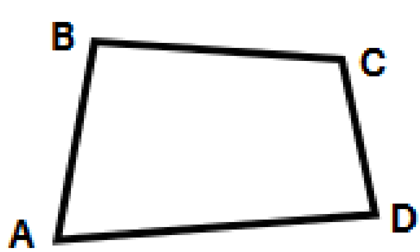


ಸುಳುವಾದ ನಾಲ್ಬದಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತೆ ಎರಡು ಬಗೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು, ಅವುಗಳೆಂದರೆ ಉಬ್ಬು ನಾಲ್ಬದಿಗಳು **(Convex Quadrilaterals)** ಮತ್ತು ತಗ್ಗು ನಾಲ್ಬದಿಗಳು **(Concave Quadrilaterals).**

A. ಉಬ್ಬು ನಾಲ್ಬದಿಗಳು (Convex Quadrilaterals)

ನಾಲ್ಬದಿಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಒಳ ಮೂಲೆಯೂ 180° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದರೆ ಅದು ಉಬ್ಬು ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉಬ್ಬು ನಾಲ್ಬದಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಯಾವುದೇ ಮೂಲೆಯು 180° ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದೆ.

1. ಸಾಟಿಯಿರದ ನಾಲ್ಬದಿ (trapezium or Irregular quadrilateral)

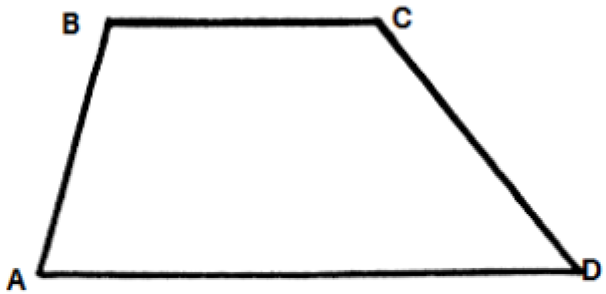


ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಎದುರು ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಾಟಿಯಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ (Non-Parallel) ಅದನ್ನು ಸಾಟಿಯಿರದ ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುವವರು ಹಾಗು ಇದರ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಶೇಷತೆ ಎಂದರೆ ಇದರ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯನ್ನು (Un-equal lengths) ಹೊಂದಿವೆ.

ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: $AB \neq BC \neq CD \neq DA$, $AD \nparallel BC$, $AB \nparallel CD$

2. ಸಾಟಿ–ಇಬ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿ (trapezoid (US) or Trapezium(UK))

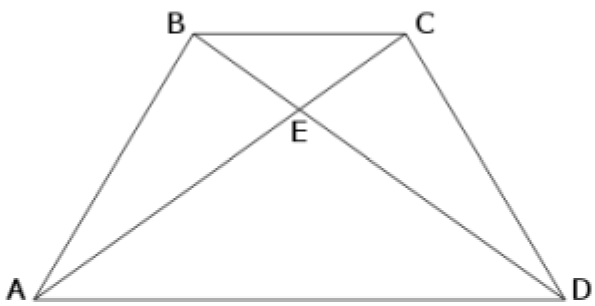


ನಾಲ್ಬದಿಯ ಒಂದು ಜೊತೆ ಎದುರು ಬದಿಗಳು ಮಾತ್ರ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಾಟಿಯಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಾಟಿ-ಇಬ್ಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುವವರು.

ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: $AD \parallel BC$, $AB \nparallel CD$

3. ಸರಿ–ಇಬ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿ (Isosceles trapezoid)



ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎರಡು ಎದುರು ಬದಿಗಳು ಮಾತ್ರ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಾಟಿಯಿದ್ದು ಮತ್ತು ಅದರ ಬುಡದ ಮೂಲೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸರಿ-ಇಬ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

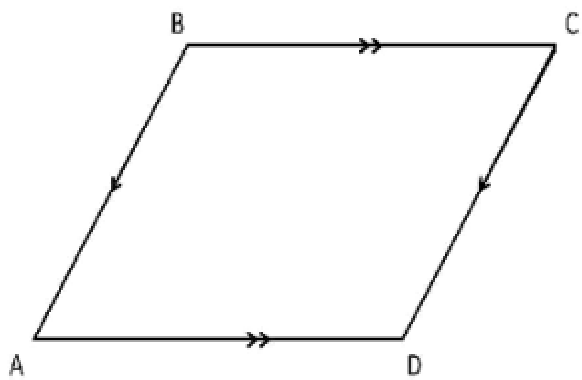
ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: $AB = DC$, $AD \parallel BC$, $AB \nparallel CD$

ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು: $AC = DB$

ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle AEB = \angle DEC$, $\angle AED = \angle BEC$

4. ಸಾಟಿಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿ (Parallelogram)



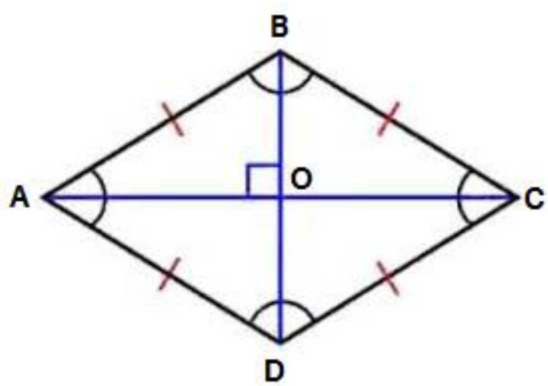
ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಎದುರು ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಾಟಿಯಿದ್ದು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಎದುರು ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಾಟಿಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: AD = BC, AB = DC, AD || BC, AB || DC

ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: ∠BAD = ∠BCD, ∠ABC= ∠ADC

5. ಹರಳಾಕೃತಿ (Rombus)



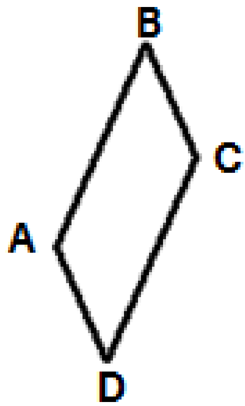
ಹರಳಾಕೃತಿ ಅಥವಾ ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎಂದರೆ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ನೇರಡ್ಡವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ (Diagonals are perpendicularly bisect each other).

ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: AD = BC = AB = DC, AD || BC, AB || DC.

ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: ∠AOB = ∠BOC = ∠AOD = ∠DOC = 90°, ∠ABC= ∠ADC, ∠BAD = ∠BCD.

6. ಬದಿಬೇರ್ಮೆ ಹರಳಾಕೃತಿ (Rhomboid)



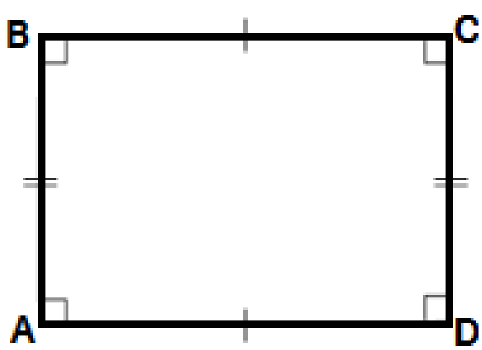
ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಎದುರು ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಾಟಿಯಿದ್ದು ಮತ್ತು ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಬದಿಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು ಹಾಗು ಅದರ ಮೂಲೆಗಳು ಸರಿಮೂಲೆಯಾಗದಿದ್ದರೆ (Non-Right Angle) ಅದು ಬದಿಬೇರ್ಮೆ ಹರಳಾಕೃತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: $AD \parallel BC, AB \parallel DC , AB \neq BC, CD \neq DA, AD = BC, AB = DC$

ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: $\angle ABC \neq 90°, \angle ADC \neq 90°, \angle BAD \neq 90°, \angle BCD \neq 90°$

7. ಆಯತ ಅಥವಾ ನೇರಡ್ಡಸಾಟಿ ನಾಲ್ಬದಿ (Rectangle)



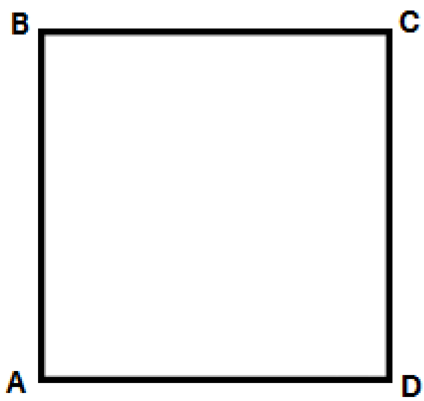
ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಎದುರು ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿ-ಸಾಟಿಯಿದ್ದು (Opposite sides are equal and parallel) ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂಲೆಗಳು ನೇರಡ್ಡವಾಗಿದ್ದರೆ (Right Angle) ಅದು ಆಯತವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಯತಕ್ಕೆ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ **ನೇರಡ್ಡಸಾಟಿ ನಾಲ್ಬದಿ** ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: $AD \parallel BC, AB \parallel DC , AD = BC, AB = DC$

ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: $\angle ABC = \angle ADC = \angle BAD = \angle BCD = 90°$

8. ಚೌಕ ಅಥವಾ ಸರಿ ನಾಲ್ಬದಿ (Square)



ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಎದುರು ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಸಾಟಿಯಾಗಿದ್ದು (Sides are Equal and Parallel) ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂಲೆಗಳು ನೇರಡ್ಡವಾಗಿದ್ದರೆ (Right Angle) ಅದು ಚೌಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಚೌಕಕ್ಕೆ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಸರಿ ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

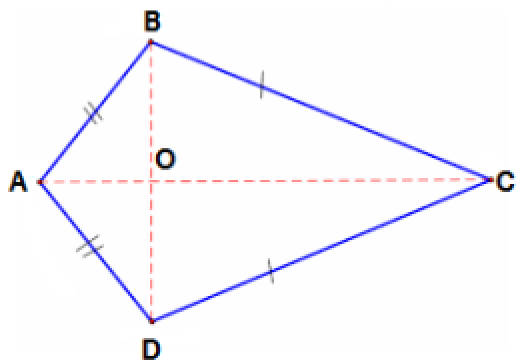
ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: $AD \parallel BC, AB \parallel DC, AD = BC = AB = DC$

ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: $\angle ABC = \angle ADC = \angle BAD = \angle BCD = 90°$

(ಚೌಕದ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿ ತಿಳಿಸುವ ಅರಿಮೆಯ ಬರಹ : http://arime.org/ಚೌಕ)

9. ಗಾಳಿಪಟ (Kite)



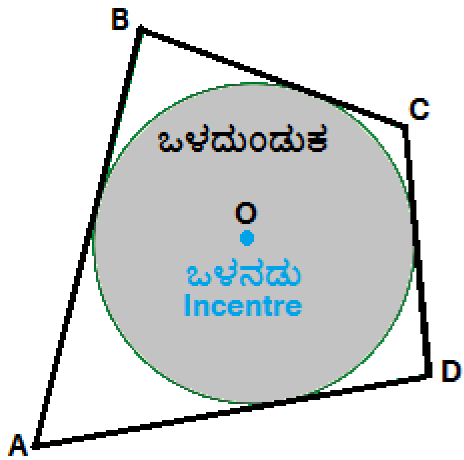
ನಾಲ್ಬದಿಯ ಜೊತೆಯ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಳತೆಯನ್ನು (Pair of adjacent sides are equal to each other) ಹೊಂದಿದ್ದು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ನೇರಡ್ಡವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ (Diagonals are perpendicularly bisect each other) ಅದು ಗಾಳಿಪಟಾಕೃತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ ಜೋಡಿ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಾಗಿವೆ.

ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: AB = AD, BC = CD.

ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: ∠AOB = ∠BOC = ∠COD = ∠DOA = 90°

10. ತಗಲು ನಾಲ್ಬದಿ **(Tangential quadrilateral)**



ಒಂದು ದುಂಡುಕದ (Circle) ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ತಗಲುಗೆರೆಗಳು (Tangent lines) ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿ ಮಾರ್ಪಟ್ಟಾಗ ಅದು ತಗಲು ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎದುರು ಬದಿಗಳ ಮೊತ್ತವು ಇನ್ನೊಂದು ಎದುರು ಬದಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

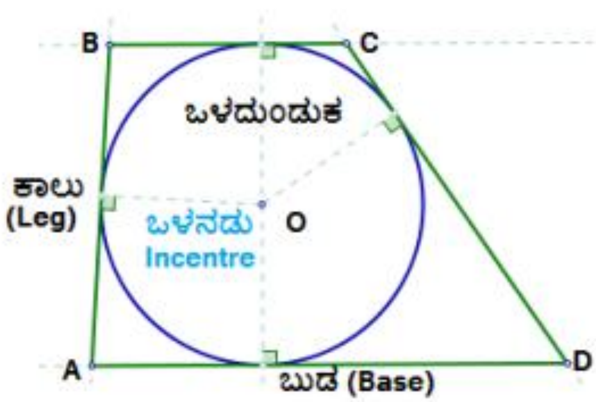
ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ತಗಲುಗೆರೆಗಳು: AB, BC, CD, DA

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: AD + BC = AB + DC.

ದುಂಡುಕ: ದುಂಡುಕದ ನಡುವು ನಾಲ್ಬದಿಗೆ ಒಳನಡು O (Incentre) ಆಗುತ್ತದೆ

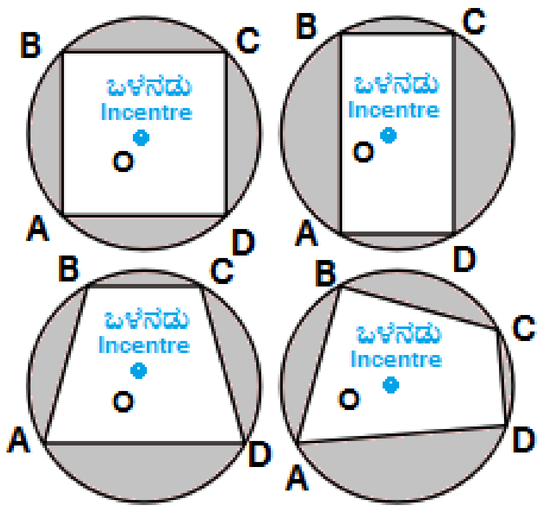
11. ತಗಲು ಸಾಟಿ–ಇಬ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿ **(Tangential trapezoid)**



ಒಂದು ದುಂಡುಕದ (Circle) ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು **ತಗಲುಗೆರೆಗಳು (Tangent lines)** ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿ ಮಾರ್ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಎದುರುಬದಿಗಳು ಸಾಟಿಯಾದಾಗ (Opposite sides are parallel to each other) ಅದು ತಗಲು ಸಾಟಿಇಬ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದೆನೆಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಸಾಟಿಬದಿಗಳನ್ನು (Parallel Sides) **ಬುಡ (Base)** ಎಂದು ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಬದಿಗಳನ್ನು **ಕಾಲು (Leg**) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು
ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ತಗಲುಗೆರೆಗಳು: AB, BC, CD, DA
ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: AD + BC = AB + DC, AD || BC, ಬುಡ=AD, BC ಮತ್ತು ಕಾಲು = AB, DC
ದುಂಡುಕ: ದುಂಡುಕದ ನಡುವು ನಾಲ್ಬದಿಗೆ ಒಳನಡು (Incentre) ಆಗುತ್ತದೆ

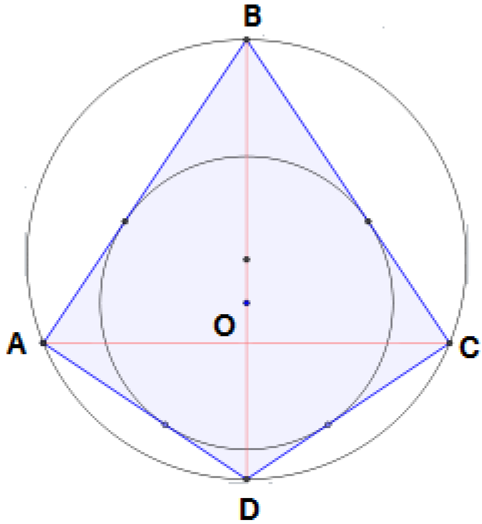
12. ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿ **(Cyclic quadrilateral)**



ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ತುದಿಗಳು (Vertices) ದುಂಡುಕದ ಮಯ್ಯನ್ನು (Circumference) ತಗಲಿದಾಗ ಅದು ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಹಾಗು ಯಾವುದೇ ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎದುರು ಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ **180°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ತುದಿಗಳು: A, B, C, D
ಬದಿಗಳು: AD, BC, AB, DC.
ದುಂಡುಕ: ದುಂಡುಕದ ನಡುವು ನಾಲ್ಬದಿಗೆ ಒಳನಡು O (Incentre) ಆಗುತ್ತದೆ.
ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: ∠BAD + ∠BCD = ∠ABC + ∠ADC = 180°

13. ನೇರಡ್ಡಬದಿ ಗಾಳಿಪಟ **(Right Kite)**

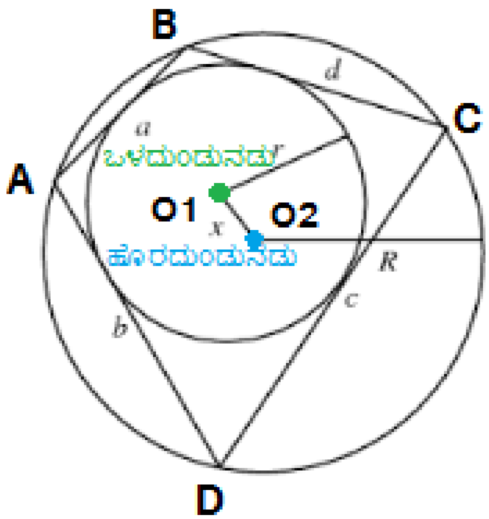


ನಾಲ್ಬದಿಯು ಸರಿಯಳತೆಯ ಜೋಡಿ ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದ್ದಿದ್ದು ಹಾಗು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯ ಬದಿಗಳು ಕೂಡುವೆಡೆಗಳು ನೇರಡ್ಡಗಳಾಗಿದ್ದರೆ (Perpendicular) ಅದು ನೇರಡ್ಡಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿ ಅಥವಾ ನೇರಡ್ಡಬದಿ ಗಾಳಿಪಟವಾಗುತ್ತದೆ. ನೇರಡ್ಡಬದಿ ಗಾಳಿಪಟವನ್ನು ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ, ಹೀಗಾಗಿ ಇದು ದುಂಡುಸುತ್ತು (Cyclic Quadrilaterals) ನಾಲ್ಬದಿಯ ಒಂದು ಬಗೆಯಾಗಿದೆ.

ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: AB = BC, AD = DC.
ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: ∠DAB = ∠BCD = 90° ಮತ್ತು ∠AOB = ∠BOC = ∠COD = ∠DOA = 90°
, ∠ABC + ∠ADC = 180° (ಇದುದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿ (Cyclic Quadrilaterals) ಕೂಡ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ)

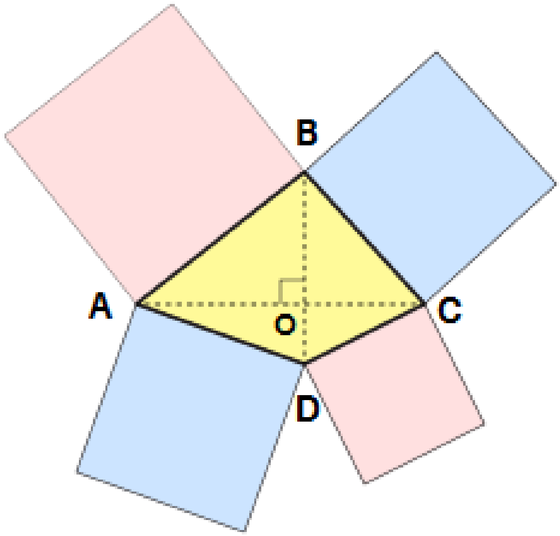
14. ಎರಡುನಡು ನಾಲ್ಬದಿ (Bicentric quadrilateral)



ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು (Sides) ಒಳದುಂಡುಕಕ್ಕೆ (incircle) ತಗಲಿದ್ದು ಮತ್ತು ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ತುದಿಗಳು (Vertices) ಹೊರದುಂಡುಕಕ್ಕೆ (circumcircle) ತಗಲಿದ್ದು, ಒಳದುಂಡುಕದ ನಡುವು **ಒಳದುಂಡುನಡು (incentre)** ಮತ್ತು ಹೊರದುಂಡುಕದ ನಡುವು **ಹೊರದುಂಡುನಡು**ವನ್ನು **(circumcentre)** ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಹಾಗು ಯಾವುದೇ ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎದುರು ಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ **180°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ನಾಲ್ಬದಿಗಳನ್ನು ಎರಡುನಡು ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.
ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ತುದಿಗಳು: A, B, C, D
ಬದಿಗಳು: AD, BC, AB,DC.
ದುಂಡುಕ: ಒಳದುಂಡುಕದ ನಡುವು ನಾಲ್ಬದಿಗೆ ಒಳದುಂಡುನಡು O1 (Incentre) ಆಗುತ್ತದೆ ಹಾಗು ಹೊರದುಂಡುಕದ ನಡುವು ನಾಲ್ಬದಿಗೆಹೊರದುಂಡುನಡು O2 (circumcentre) ಆಗುತ್ತದೆ,
ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC = 180°$

15. ನೇರಡ್ಡಮೂಲೆಗೆರೆ ನಾಲ್ಬದಿ (Orthodiagonal quadrilateral)



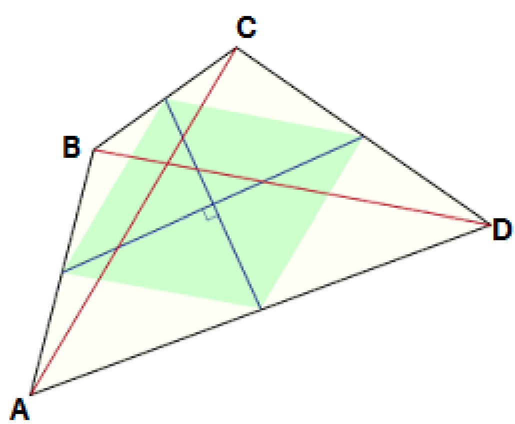
ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ನೇರಡ್ಡವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ (Diagonals are orthogonal) ಅದು ನೇರಡ್ಡಮೂಲೆಗೆರೆ ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹಿರಿಮೆ ಏನೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಎದುರುಬದಿಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಗಳ (Sum of the squares of opposite sides) ಮೊತ್ತವು ಉಳಿದ ಎದುರುಬದಿಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬದಿಗಳ ಕೆಂಪುಬಣ್ಣದ ಒಟ್ಟು ಹರವು ನೀಲಿಬಣ್ಣದ ಒಟ್ಟು ಹರವಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ dಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ನೇರಡ್ಡವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸುವ ಚೌಕ (Square), ಗಾಳಿಪಟ (Kite) ಮತ್ತು ಹರಳಾಕೃತಿಗಳು (Rhombus) ನೇರಡ್ಡಮೂಲೆಗೆರೆ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಗುಂಪಿಗೆ ಸೇರುತ್ತವೆ.

ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: $AD^2 + BC^2 = DC^2 + AB^2$

ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90°$

16. ಸರಿಮೂಲೆಗೆರೆ ನಾಲ್ಬದಿ (Equidiagonal quadrilateral)



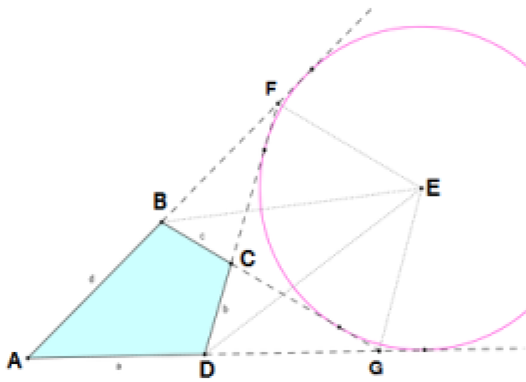
ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯನ್ನು (Diagonals are in equal length) ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದು ಸರಿಮೂಲೆಗೆರೆ ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಚೌಕ (Square), ಆಯತ (Rectangle) ಮತ್ತು ಸರಿಇಬ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿ (Isosceles trapezoid) ಸರಿಮೂಲೆಗೆರೆ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಗುಂಪಿಗೆ ಸೇರುತ್ತವೆ.

ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಗಳು: AD, BC, AB, DC.

ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು: AC = DB

17. ಹೊರತಗಲುಗೆರೆ ನಾಲ್ಬದಿ (Ex–tangential quadrilateral)

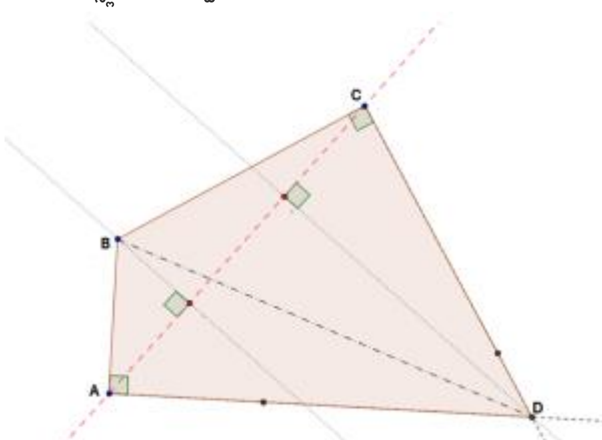


ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳ ಮುಂಗೆರೆಗಳು (Extended Lines) ಒಂದು ಹೊರ ದುಂಡುಕದ (excircle) ಮೇಲ್ಮೆಯ್ಯನ್ನು ತಗಲಿದರೆ (Tangent) ಅದು ಹೊರತಗಲುಗೆರೆ (Ex-tangential) ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.
ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: AB + BC = AD + DC ಹಾಗು AB + CD = BC + AD

ಹೊರತಗಲುಗೆರೆ: BF, DG, CF, CG

18. ಜೇಮ್ಸ್ಲೇವ್ ನಾಲ್ಬದಿ (Hjelmslev quadrilateral)



ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯು ಎದುರುಬದರು ಸರಿಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಜೇಮ್ಸ್ಲೇವ್ ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ, ನೇರಡ್ಡಬದಿ ಗಾಳಿಪಟ (Right Kite) ಕೂಡ ಒಂದು ಜೇಮ್ಸ್ಲೇವ್ ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿದೆ.

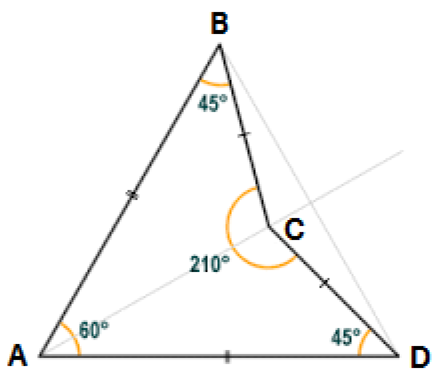
ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಬದಿಗಳು: AD, BC, AB, DC.
ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: ∠BAD = ∠BCD = 90° ಮತ್ತು ∠ABC + ∠ADC = 180°

B. ತಗ್ಗು ನಾಲ್ಬದಿಗಳು (Concave Quadrilaterals)

ನಾಲ್ಬದಿಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಒಳ ಮೂಲೆಯೂ **180°** ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದರೆ ಅದು ತಗ್ಗು ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೆಳಗಿನ ತಗ್ಗು ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈಟಿ ನಾಲ್ಬದಿ (Dart Quadrilateral)



ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಜೋಡಿಗೆರೆಗಳು (Pair of adjacent sides are equal) ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿದ್ದು ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಮೂಲೆಯೂ **180°** ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದರೆ ಅದು ಈಟಿ ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯು **ಈಟಿ ತುದಿಯನ್ನು (Dart)** ಹೋಲುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಈಟಿ ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅದರ ಒಂದು ಮೂಲೆಯೂ 210° ಆಗಿದೆ, ಇದು 180° ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದೆ, ಹಾಗಾಗಿ ಇದು ತಗ್ಗು ನಾಲ್ಬದಿಯ (Concave Quadrilateral) ಒಂದು ಬಗೆಯಾಗಿದೆ.
ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

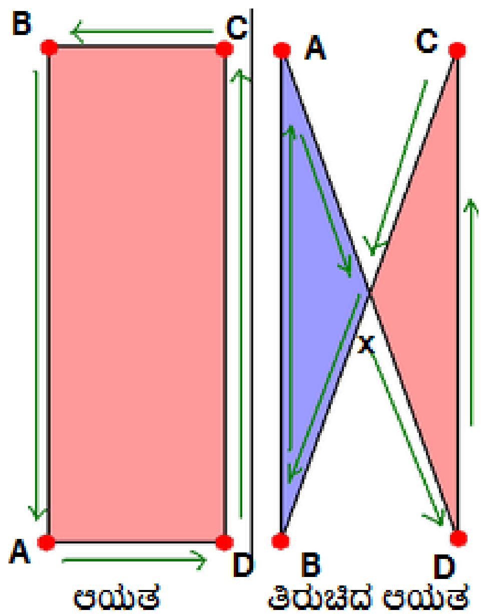
ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: AB = AD, BC = CD
ಮೂಲೆಕಟ್ಟಳೆ: ∠ABC = ∠ADC, ∠BCD = 210° > 180°.

II. ಸುಳುವಲ್ಲದ ನಾಲ್ಬದಿಗಳು (Complex Quadrilaterals).

ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯುವ ಸುಳುವಾದ ನಾಲ್ಬದಿಯ (Simple Quadrilateral) ಮಾರ್ಪಾಟಿಗಿಂತ ಬೇರೆಯದಾದ ಮಾರ್ಪಾಟನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನಾಲ್ಬದಿಗಳನ್ನು ಸುಳುವಲ್ಲದ ನಾಲ್ಬದಿಗಳು (Complex Quadrilateral) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಇಂತಹ ಸುಳುವಲ್ಲದ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಬಗೆಗಳಲ್ಲಿ ತಿರುಚು ನಾಲ್ಬದಿಯು (self-intersecting Quadrilaterals) ಒಂದು ಬಗೆಯಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಒಂದು ಬದಿಯನ್ನು ತಿರುಚಿದಾಗ (Crossed) ತಿರುಚು ನಾಲ್ಬದಿ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ತಿರುಚು ನಾಲ್ಬದಿಗಳನ್ನು **ಚಿಟ್ಟೆ ನಾಲ್ಬದಿ(Butterfly Quadrilateral)**, **ಬಿಲ್ಲು–ಗಂಟು ನಾಲ್ಬದಿ (Bow–Tie Quadrilateral)** ಎಂದೂ ಕರೆಯುವವರು. ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಕೆಲವು ಈ ಸುಳುವಲ್ಲದ ತಿರುಚು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ತಿರುಚು ಆಯತ (Crossed Rectangle)



ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು (Rectangle) ಎರಡು ಸರಿಪಾಲನ್ನಾಗಿ ತಿರುಚಿ ಮತ್ತು ತಿರುಚಿದ ತುದಿಗಳು (Vertices) ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ತಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ತಿರುಚು ಆಯತ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಎಲ್ಲಾ ಸರಿಸಾಟಿ ತಿರುಚು ನಾಲ್ಬದಿಗಳು ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿದೆ (Cyclic Quadrilaterals) ಕೂಡ.

ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

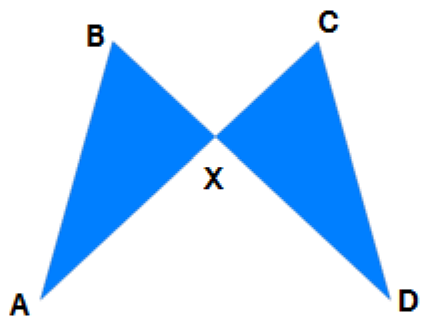
ಬದಿಕಟ್ಟಳೆ: ABCD ಆಯತದಲ್ಲಿ AB ಬದಿಯನ್ನು ತಿರುಚಿದಾಗ ಅದು BA ಆಗುತ್ತದೆ ಹಾಗು AB =CD ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು: BC,

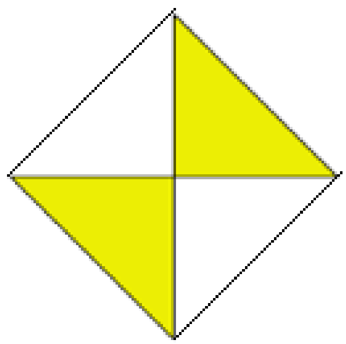
DA ಎಂಬ ಎರಡು ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ, ಹಾಗು BC = DA ಆಗಿರುತ್ತದೆ, ಅದರ ತಿರುಚು ನಡುವು X ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗುAX = XD, CX =XB ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸುಳುವಲ್ಲದ ನಾಲ್ಬದಿಗಳಿಗೆ **(Complex Quadrilaterals)** ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ
ತಿರುಚು ಸಾಟಿಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿ**(Antiparallelogram)** ಮತ್ತು ತಿರುಚು ಚೌಕ **(Crossed Square).**

❖ **ತಿರುಚು ಸಾಟಿಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿ (Antiparallelogram)**



❖ **ತಿರುಚು ಚೌಕ (Crossed Square)**



ನಾಲ್ಬದಿಯ ಗುಣಗಳು:

1. ಸುಳುವಾದ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಗುಣಗಳು (Properties of simple quadrilaterals)

- ❖ ಯಾವುದೇ ಸುಳುವಾದ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಯ ಮೊತ್ತವು 360°ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
- ❖ ನಾಲ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಎರಡು ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳನ್ನು (Diagonals) ಎಳೆಯಬಹುದು.
- ❖ ನಾಲ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬದಿಗಳ ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚುಕಡಿಮೆಯಾದಂತೆ (Proportion) ಅದರ ಮೂಲೆಗೆರೆಯ ಉದ್ದವು ಹೆಚ್ಚುಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತವೆ.

❖ ಉಬ್ಬು ನಾಲ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ (Convex Quadrilateral) ಎಲ್ಲಾ ಎರಡು ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು (Diagonals) ನಾಲ್ಬದಿಯ ಒಳಗಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಉಬ್ಬು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಬಗೆಗಳನ್ನು ನೋಡಬಹುದು.

❖ ತಗ್ಗು ನಾಲ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ (Concave Quadrilateral) ಒಂದು ಮೂಲೆಗೆರೆ (Diagonal) ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹೊರಗಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೇಲಿನ ಈಟಿ ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು (Dart Quadrilateral) ನೋಡಬಹುದು.

❖ ನಾಲ್ಬದಿಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಅವುಗಳ ಬದಿ, ಮೂಲೆ ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳ ಮೇಲೆ ಮಾರ್ಪಾಟು ಹೊಂದುತ್ತವೆ. ಹೆಚ್ಚಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಬಗೆಯ ನಾಲ್ಬದಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ತಿಳಿಯಿರಿ.

❖ ಯಾವುದೇ ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯ (Cyclic Quadrilaterals) ಎದುರು ಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ (Sum of opposite angles) **180°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ, ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿ ತಿಳಿಯಲು ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ನೋಡಿ.

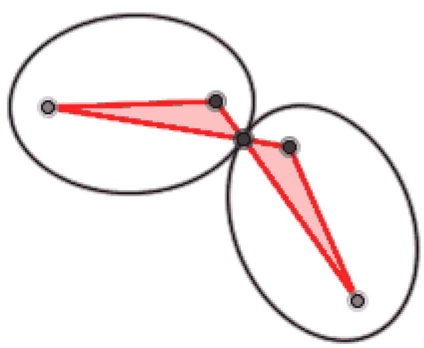
2. ಸುಳುವಲ್ಲದ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಗುಣಗಳು (Properties of complex quadrilaterals).

❖ ತಿರುಚು ನಾಲ್ಬದಿಯು (Crossed Quadrilaterals) ಒಂದು ಸುಳುವಲ್ಲದ ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿದೆ.

❖ ಯಾವುದೇ ತಿರುಚು ನಾಲ್ಬದಿಯು ಒಂದು ಜೊತೆ **ಕಿರಿಮೂಲೆ (Acute Angle)** ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಜೊತೆ **ಮೀರುಮೂಲೆ (Reflex Angle)**ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

❖ ಯಾವುದೇ ತಿರುಚು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಮೂಲೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ **720°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ

❖ ಯಾವುದೇ ತಿರುಚು ನಾಲ್ಬದಿಯು ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ (Cyclic Quadrilaterals), ಕೆಳಗಿನ ಓಡುಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.



ಸೆಲೆಗಳು: *http://www.bbc.co.uk*, *https://www.mathsisfun.com*, *http://byjus.com/cbse*, *http://www.mbacrystalball*, *http://www.ask-math.com*, *http://www.lavcmath.com*, *Wikipedia)*

5. ನಾಲ್ಬದಿಗಳು – ಭಾಗ 2

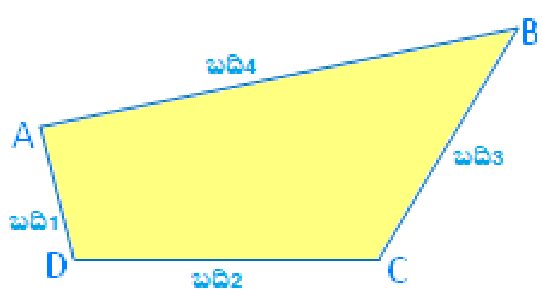
ಹಿಂದಿನ ಬರಹದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಬದಿಗಳು ಎಂದರೇನು, ಅವುಗಳ ಹಲವು ಬಗೆಗಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹಿರಿಮೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು. ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರೆದು ಈ ಬರಹದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter), ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹರವು (Area), ನಾಲ್ಬದಿಯ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು(Angles) ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಬಗೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ ಹಾಗು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹಳಮೆಯನ್ನು (History of Quadrilaterals) ತಿಳಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

ನಾಲ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ, ಮೂಲೆ, ಹರವುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ಗುರುತು	ಹುರುಳು
=	ಸರಿಯಾಗಿದೆ (Equal to)
∠	ಮೂಲೆ (Angle)
°	ಮೂಲೆಯಳತೆ (Angle measurement)
∴	ಆದ್ದರಿಂದ (Therefore)
Δ	ಮೂರ್ಬದಿ (Triangle)
√	ಮರುಮಡಿ ಬೇರು (Square root)
⇒	ತೋರಿಸುವಿಕೆ (Implies)

1. ನಾಲ್ಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ (Perimeter of the Quadrilaterals):

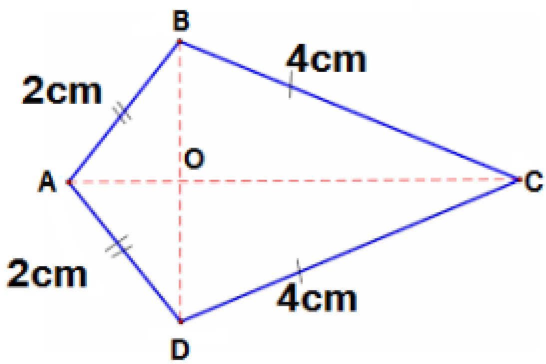
ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು, ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ಬದಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದವು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಮೇಲಿನ ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ, ಆದರ ಬದಿಗಳು **AD, DC, CB** ಮತ್ತು **BA** ಆಗಿವೆ ಹಾಗು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ **P** ಆಗಿರಲಿ.

ಸುತ್ತಳತೆ P = ಬದಿ1 + ಬದಿ2 + ಬದಿ3 + ಬದಿ4 = AD + DC + CB + BA

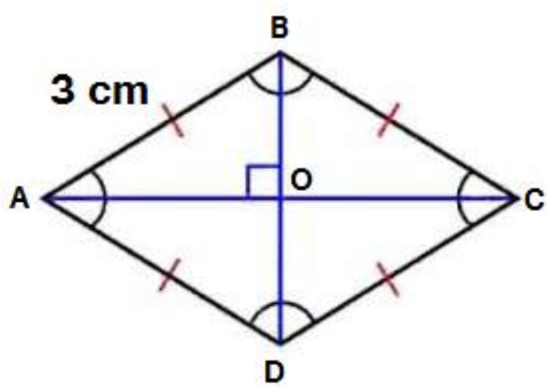
ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಕೆಳಗಿನ **ADCB** ಗಾಳಿಪಟವನ್ನು (Kite) ತೆಗೆದ್ದುಕೊಳ್ಳೋಣ, ಅದರ ಬದಿಗಳು **AD = 2cm, DC = 4cm, CB = 4cm** ಮತ್ತು **BA = 2cm** ಆಗಿವೆ ಹಾಗು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ **P** ಆಗಿರಲಿ.



ಸುತ್ತಳತೆ P = ಬದಿ1 + ಬದಿ2 + ಬದಿ3 + ಬದಿ4 = AD + DC + CB + BA = 2 + 4 + 4 + 2 = 12cm

*∴ ಗಾಳಿಪಟ **ADCB** ಯ ಸುತ್ತಳತೆ **P = 12cm***

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಹರಳಾಕೃತಿ (Rombus) **ADCB** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಅದರ ಒಂದು ಬದಿ **AB = 3cm** ಆಗಿದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯೆಷ್ಟು?



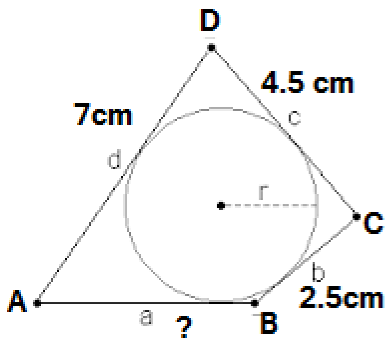
ಹಿಂದಿನ ಬರಹದಲ್ಲಿ ನಾವುಗಳು ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಹರಳಾಕೃತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ,

∴ AD = DC = CB = BA = 3cm.

ಸುತ್ತಳತೆ P = ಬದಿ1 + ಬದಿ2 + ಬದಿ3 + ಬದಿ4 = AD + DC + CB + BA = 3 + 3 + 3 + 3 = 12cm.

*∴ ಹರಳಾಕೃತಿ **ADCB** ಯ ಸುತ್ತಳತೆ **P = 12cm.***

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಕೆಳಗಿನ ಒಂದು ತಗಲು ನಾಲ್ಬದಿ (Tangential quadrilateral) **ABCD**ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ, ಅದರ ಬದಿಗಳು **DA = 7cm, CD = 4.5cm, BC = 2.5cm** ಆದಾಗ ಅದರ ಬದಿ **AB** ಯ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?



ಒಂದು ದುಂಡುಕದ (Circle) ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ತಗಲುಗೆರೆಗಳು (Tangent lines) ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿ ಮಾರ್ಪಟ್ಟಾಗ ಅದು ತಗಲುನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎದುರು ಬದಿಗಳ ಮೊತ್ತವು ಇನ್ನೊಂದು ಎದುರು ಬದಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

∴ ಎದುರು ಬದಿಗಳ ಮೊತ್ತ AD + BC = DC + AB.

ತಗಲು ನಾಲ್ಬದಿ (Tangential quadrilateral) **ABCD***ಯ* ಬದಿಗಳು **DA = 7cm, CD = 4.5cm, BC = 2.5cm.**

$\Rightarrow 7 + 2.5 = 4.5 + AB$

$\Rightarrow 9.5 = 4.5 + AB$

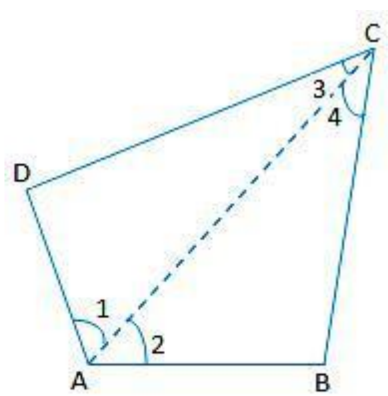
$\Rightarrow AB = 9.5 - 4.5 = 5cm$

∴ ತಗಲು ನಾಲ್ಬದಿ **ABCD** ಯಲ್ಲಿ **AB** ಬದಿಯ ಉದ್ದ **5cm** ಆಗಿದೆ.

2. ನಾಲ್ಬದಿಯ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ.

ಹೇಳಿಕೆ: "*ಯಾವುದೇ ಸುಳುವಾದ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವು **360°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ*".

ತೋರಿಸಿಕೆ (Proofs):



***ABCD** ಎಂಬ ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ **AC** ಎಂಬ ಒಂದು ನಡುಗೆರೆಯನ್ನು (Bisector Line) ಎಳೆಯೋಣ*

ನಡುಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಗುರುತಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ .

$\angle 1 + \angle 2 = \angle A$ …… (i)

$\angle 3 + \angle 4 = \angle C$ …… (ii)

ನಡುಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದಾಗ ನಮಗೆ ΔABC ಮತ್ತು ΔACD ಎಂಬ ಎರಡು ಮೂರ್ಬದಿಗಳು (Triangles) ಸಿಗುತ್ತದೆ.

*ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಮೂರ್ಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಯ ಮೊತ್ತವು **180°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.*

∴ ΔABC *ಯಲ್ಲಿ*

$\angle 2 + \angle 4 + \angle B = 180°$

∴ ΔACD *ಯಲ್ಲಿ*

$\angle 1 + \angle 3 + \angle D = 180°$

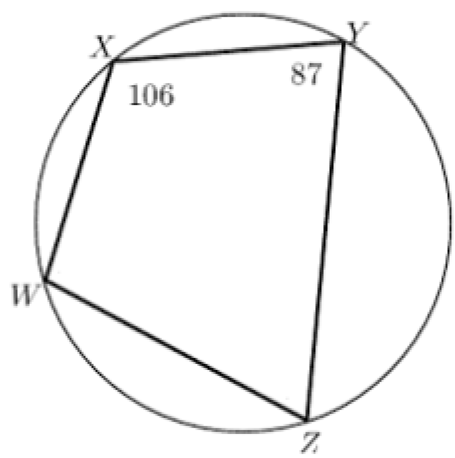
ΔABC *ಮತ್ತು* ΔACD *ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ* $\angle 2 + \angle 4 + \angle B + \angle 1 + \angle 3 + \angle D = 360°$ *ಆಗುತ್ತದೆ.*

$\Rightarrow (\angle 1 + \angle 2) + \angle B + (\angle 3 + \angle 4) + \angle D = 360°$

$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ [(i) *ಮತ್ತು* (ii) *ಅನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು*]

∴ *ಯಾವುದೇ ಸುಳುವಾದ ನಾಲ್ಬದಿಯ (Simple Quadrilateral) ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವು **360°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.*

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಕೆಳಗಡೆ **WZYX** ಎಂಬ ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ (Cyclic quadrilateral) ಮೂಲೆ **∠WXY = 106°** ಮತ್ತು ಮೂಲೆ **∠XYZ = 87°** ಆದಾಗ ಅದರ ಉಳಿದೆರಡು ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವು **360°** ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



*ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ತುದಿಗಳು (Vertices) ದುಂಡುಕದ ಮಯ್ಯನ್ನು (Circumference) ತಗಲಿದಾಗ ಅದು ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದುಕರೆಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಹಾಗು ಯಾವುದೇ ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎದುರು ಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ **180°** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.*

∴ $\angle WXY + \angle YZW = \angle XYZ + \angle ZWX = 180°$

$106° + \angle YZW = 87° + \angle ZWX = 180°$

$\therefore \angle YZW = 180° – 106° = 74°$

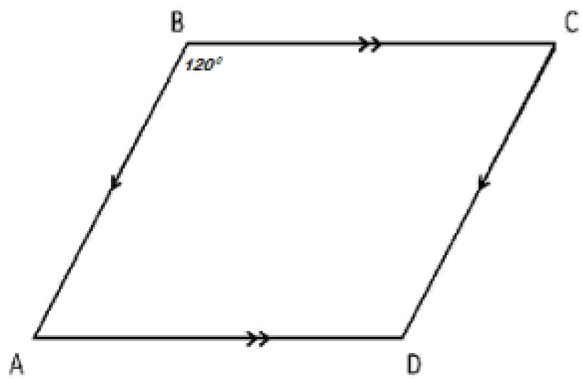
$\therefore \angle ZWX = 180° – 87° = 93°$

∴ *ನಾಲ್ಬದಿಯ ಉಳಿದೆರಡು ಮೂಲೆಗಳು* $\angle YZW = 74°$ *ಮತ್ತು* $\angle ZWX = 93°$ *ಆಗಿವೆ.*

ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ $\angle WXY + \angle YZW + \angle XYZ + \angle ZWX = 106° + 74° + 87° + 93° = 360°$

ಅಲ್ಲಿಗೆ ನಾವು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದಂತಾಯ್ತು.

ಉದಾಹರಣೆ **2: BADC** ಎಂಬ ಸಾಟಿಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿಯ (Parallelogram) ಒಂದು ಮೂಲೆ $\angle ABC = 120°$
ಆದಾಗ ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳನ್ನುಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಯಾವುದೇ ಸಾಟಿಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎದುರು ಮೂಲೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore \angle ABC = \angle CDA$ *ಮತ್ತು* $\angle DAB = \angle BCD$

ಇಲ್ಲಿ $\angle ABC = 120°$ *ಆಗಿರುವುದರಿಂದ* $\angle CDA = \angle ABC = 120°$ *ಆಗಿರುತ್ತದೆ.*

ನಾವುಗಳು ಮೇಲೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore \angle ABC + \angle CDA + \angle DAB + \angle BCD = 360°$

$\therefore 120° + 120° + \angle DAB + \angle BCD = 360°$

$\angle DAB + \angle BCD = 360° – 120° - 120° = 120°$

ಮೇಲೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ $\angle DAB = \angle BCD$ *ಆಗಿದೆ.*

$\therefore \angle DAB + \angle DAB = 120° = 2 \times \angle DAB = 120°$

$\therefore \angle DAB = 120°/2 = 60°$ *ಮತ್ತು* $\angle BCD = \angle DAB = 60°$

∴ *BADC ಎಂಬ ಸಾಟಿಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಮೂಲೆಗಳು* $\angle ABC = 120°$, $\angle CDA = 120°$, $\angle DAB = 60°$, $\angle BCD = 60°$ *ಆಗಿವೆ.*

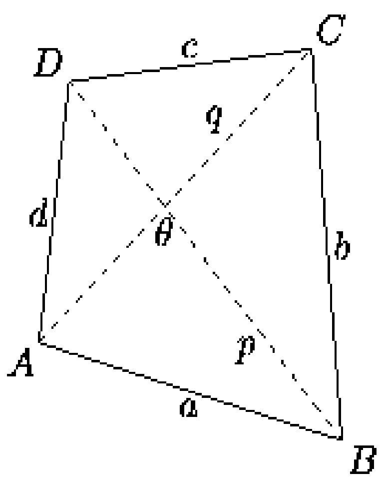
3. ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ **(Area of Quadrilateral)**

ನಾವು ಹಿಂದೆ ಚೌಕ ಎಂಬ ಬರಹದಲ್ಲಿ ಚೌಕದ ಹರವಿನ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದಿದ್ದೆವು, ಚೌಕದ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಹರವನ್ನು **ಬದಿ x ಬದಿ**ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು, ಹಾಗೆಯೇ ಆಯತದ ಹರವನ್ನು **ಉದ್ದ x ಅಗಲ** ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ನಾಲ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಬಗೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ಹಿಂದಿನ ಬರಹದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ನಾಲ್ಬದಿಯ ಬದಿಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾಗ ಚೌಕ ಮತ್ತು ಆಯತದಂತೆ ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲಾಗದು.

ಹಾಗಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಬದಿಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೋಗುವಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು (Equation) ಅನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\text{ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹರವು } A = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta = \tfrac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)\tan\theta$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{4p^2q^2-(b^2+d^2-a^2-c^2)^2}$$
$$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos\tfrac{1}{2}(A+C)}.$$



*ನಾಲ್ಬದಿ (Quadrilateral): **ABCD***

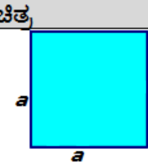
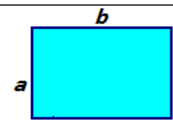
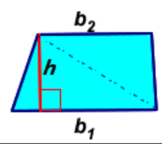
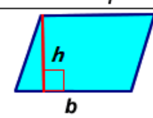
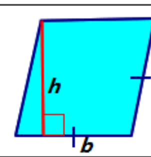
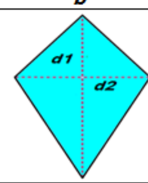
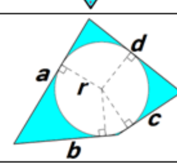
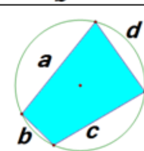
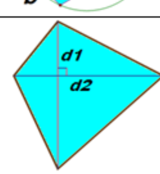
*ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು (Diagonals): **p,q***

*ಬದಿಗಳು: **AD = d, DC = c, CB = b, BA = a***

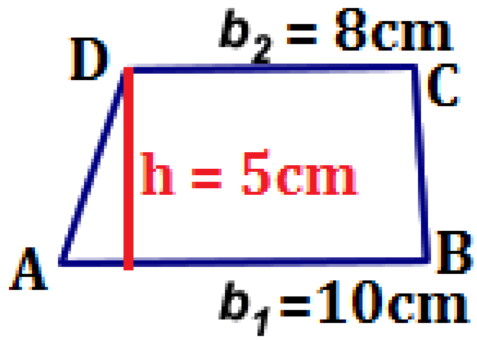
*ಅರೆಸುತ್ತಳತೆ (Semi-Perimeter) **s = 1/2 x (a + b + c + d).***

*ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಮೂಲೆ: **θ***

ನಾಲ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಬಗೆಗಳಿವೆ, ಅವುಗಳ ಬದಿಗಳು, ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು ಮತ್ತು ಮೂಲೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಆಯಾ ನಾಲ್ಬದಿಗೆತಕ್ಕಂತೆ ಮೇಲಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು (Equation) ಸರಳವಾಗಿಸಿ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು ಹಾಗು ಅವುಗಳನ್ನು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹರವನ್ನುಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಬಳಸೋಣ.

ನಾಲ್ಬದಿಯ ಬಗೆ	ಚಿತ್ರ	ಹರವು (Area)	ಗುರುತುಗಳು
ಚೌಕ (Square)		A = a x a	ಬದಿಗಳು: a
ಆಯತ (Rectangle)		A = a x b	ಬದಿಗಳು: a,b
ಸಾಟಿಇಬ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿ (Trapezoid)		A = 1/2 x h x (b1 + b2)	ಬದಿಗಳು: b1,b2 ಎತ್ತರ: h
ಸಾಟಿಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿ (Parallelogram)		A = b x h	ಬದಿಗಳು: b ಎತ್ತರ: h
ಹರಳಾಕೃತಿ (Rombus)		A = b x h	ಬದಿಗಳು: b ಎತ್ತರ: h
ಗಾಳಿಪಟ (Kite)		A = 1/2 x d1 x d2	ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು: d1,d2
ತಗಲು ನಾಲ್ಬದಿ (Tangential quadrilateral)		A= s x r ಇಲ್ಲವೇ $A = \sqrt{(abcd)}$ ಇಲ್ಲಿ s = 1/2 x (a +b +c+d)	ಬದಿಗಳು: a,b,c,d ದುಂಡಿ(Radius): r
ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿ (Cyclic quadrilateral)		$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ ಇಲ್ಲಿ s = 1/2 x (a +b +c+d)	ಬದಿಗಳು: a,b,c,d
ನೇರಡ್ಡಮೂಲೆಗೆರೆ ನಾಲ್ಬದಿ (Orthodiagonal quadrilateral)		A = 1/2 x d1 x d2	ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳು: d1,d2

ಉದಾಹರಣೆ 1: ABCD ಸಾಟಿ ಇಬ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ (Trapezoid) ಸಾಟಿಬದಿಗಳು (Parallel sides) **b1 = 10cm, b2 = 8cm** ಆಗಿವೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರ **h** = **5cm** ಆದಾಗ ಅದರ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸಾಟಿ ಬದಿಗಳು (Parallel side) ***b1 = 10cm, b2 = 8cm , ಎತ್ತರ h = 5cm***

ಸಾಟಿಇಬ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹರವು ***A = 1/2 x ಎತ್ತರ x (ಸಾಟಿಬದಿ1 + ಸಾಟಿಬದಿ2) = 1/2 x h x (b1 + b2)***

A = 1/2 x 5 x (10 + 8) = 1/2 x 5 x (18) = 90/2 = 45 cm^2

***∴ ABCD** ಸಾಟಿಇಬ್ಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹರವು **45 cm^2** ಆಗಿದೆ.*

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕಟ್ಟಡವು ಸಾಟಿಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿದೆ (Parallelogram), ಅದರ ಒಂದು ಗೋಡೆಯ (wall) ಸಾಟಿಬದಿಯ ಬುಡವು (Parallel base) **25m** ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ **15m** ಆದಾಗ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಗೋಡೆಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ**.**

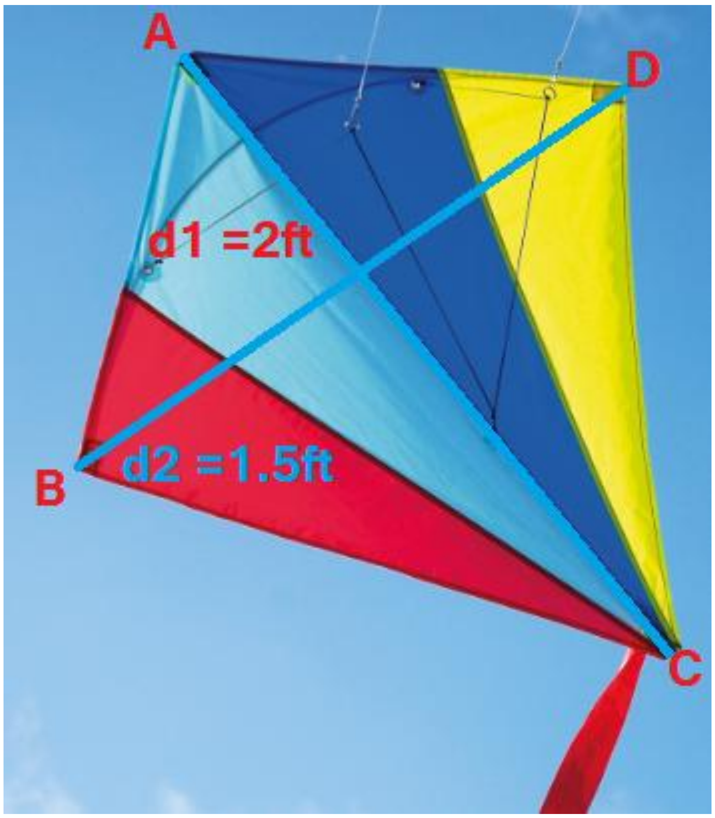
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕಟ್ಟಡದ ಸಾಟಿಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿರುವ ಗೋಡೆಯನ್ನು ***ABCD*** *ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ,*

ಸಾಟಿಬದಿಯ ಬುಡ ***BC = AD = 25m, ಎತ್ತರ = 15m.***

ಸಾಟಿಬದಿಯ ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹರವು ***A = ಬುಡ x ಎತ್ತರ = b x h.***

A = 25 x 15 = 375 m^2
∴ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕಟ್ಟಡದ ಸಾಟಿಬದಿ ನಾಲ್ಬದಿಯಾಗಿರುವ ಗೋಡೆ ***ABCD*** *ಯ ಹರವು* ***375 m^2*** *ಆಗಿದೆ.*

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಗಾಳಿಪಟದ ಎದುರು ತುದಿಗಳ ನಡುವಿನ ಉದ್ದಗಳು **AC = 2 ft** ಮತ್ತು **BD = 1.5 ft** ಆಗಿವೆ, ಬಾನಂಗಳದಲ್ಲಿ ಹಾರುತ್ತಿರುವ ಈ ಅಂದವಾದ ಬಣ್ಣ ಬಣ್ಣದ ಗಾಳಿಪಟದ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.



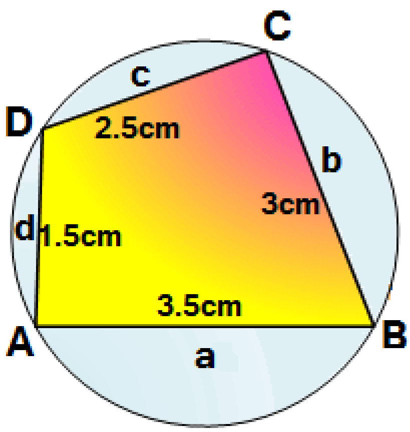
ಗಾಳಿಪಟವನ್ನು ***ABCD*** *ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.*

ಗಾಳಿಪಟದ ಎದುರು ತುದಿಗಳ ನಡುವಿನ ಉದ್ದಗಳು ***AC = d1 =2 ft*** *ಮತ್ತು* ***BD = d2 =1.5 ft*** *ಅದರ ಮೂಲೆಗೆರೆಗಳಾಗಿವೆ (Diagonals).*

ಗಾಳಿಪಟದ ಹರವು ***A = 1/2 x ಮೂಲೆಗೆರೆ1 x ಮೂಲೆಗೆರೆ2 = 1/2 x d1 x d2***

A = 1/2 x d1 x d2 = 1/2 x 2 x 1.5 = 1.5 ft^2
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಈ ಅಂದವಾದ ಬಣ್ಣ ಬಣ್ಣದ ಗಾಳಿಪಟ ***ABCD*** *ಯ ಹರವು* ***1.5 ft^2*** *ಆಗಿದೆ.*

ಉದಾಹರಣೆ 4: ABCD ಎಂಬ ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯ (Cyclic Quadrilateral) ಬದಿಗಳು **AB = 3.5cm, BC = 3cm, CD = 2.5cm, DA = 1.5cm** ಆಗಿವೆ, ಇದರ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಎಲ್ಲಾ ತುದಿಗಳು (Vertices) ದುಂಡುಕದ ಮಯ್ಯನ್ನು (Circumference) ತಗಲಿದಾಗ ಅದು ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿ ಎಂದುಕರೆಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ***AB = a = 3.5cm, BC = b = 3cm, CD = c = 2.5cm, DA = d = 1.5cm*** *ಆಗಿವೆ.*

ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹರವು $A = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$

ಇಲ್ಲಿ s *ಎಂಬುದು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಅರೆಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆ (Semi-Perimeter), ಹಾಗು* $s = 1/2 \times (a + b + c + d)$

$s = 1/2 \times (3.5 + 3 + 2.5 + 1.5) = 10.5/2 = 5.25cm$

$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sqrt{(5.25 - 3.5)(5.25 - 3)(5.25 - 2.5)(5.25 - 1.5)} = \sqrt{(1.75)(2.25)(2.75)(3.75)}$

$A = \sqrt{40.60546875} = 6.37225\ cm^2$

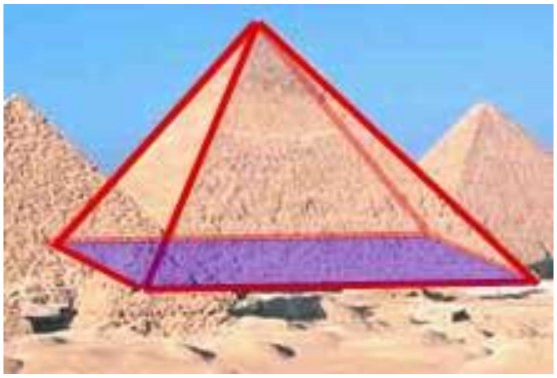
$\therefore$ ***ABCD*** *ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹರವು* ***6.37225 cm²*** *ಆಗಿದೆ.*

ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹಳಮೆ

- ಸುಮಾರು **300 B.C** ಹೊತ್ತಿನ ಗ್ರೀಕಿನ ಹೆಸರಾಂತ ಎಣಿಕೆಯರಿಗ (Mathematician) **ಯೂಕ್ಲಿಡ್** ನ ಎಣಿಕೆಯರಿಮೆಯ ಹೊತ್ತಗೆ **ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಅಡಕದಲ್ಲಿ (Euclid's Elements)** ನಾಲ್ಬದಿಗಳ ಹಲವಾರು ವಿಷಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

(ಯೂಕ್ಲಿಡ್)

- **ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯನ್ನರು** (Babylonians) ಹಲವು ಬಗೆಯ ನಾಲ್ಬದಿಗಳ ಹರವನ್ನು (Area of Quadrilatreal) ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಿದ್ದರು.
- ಈಜಿಪ್ಟಿನ **ಪೆರೋ** (Pharaoh) ಅರಸರು ಸುಮಾರು **2700 BC** ಇಂದ 500 BC ಗಳವರೆಗೆ **ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು** ಕಟ್ಟಲು ನಾಲ್ಬದಿಯಾಕಾರದ ಬುಡವನ್ನು (Quadrilateral Base) ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು,



- ಉಜ್ಜಯಿನಿಯ ಎಣಿಕೆಯರಿಗ **ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನು** (~500 A.D) ದುಂಡುಸುತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಹರವಿನ (Area of Cyclic Quadrilateral) ಬಗ್ಗೆ ಅರಕೆಮಾಡಿದ್ದನು.
- **ಪೈತಾಗೋರಸ್** (500 B.C) ಒಬ್ಬ ಗ್ರೀಕಿನ ಎಣಿಕೆಯರಿಗ. ಅವನು ತನ್ನ ಸರಿಮೂಲೆ ಮೂರ್ಬದಿಯ (Right Angle Triangle) ಕಟ್ಟಲೆಯನ್ನು ಒರೆಹಚ್ಚಲು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಿದ್ದ.

ಚಟುವಟಿಕೆ:

ನೀವು ದಿನಾಲೂ ಕಾಣುವ ನಾಲ್ಬದಿಯಾಕರಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಯಾವ ಬಗೆಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ. **ಹಿಂದಿನ ಬರಹದಲ್ಲಿ** ಹಲವಾರು ನಾಲ್ಬದಿಯ ಬಗೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಸೆಲೆಗಳು: socratic.org, thefamouspeople.com, cgm.cs.mcgill.ca, mathsisfun.com, wikipedia.org, geom.uiuc.edu, staff.argyll.epsb.ca

6. ಹಲಬದಿಗಳು -ಭಾಗ 1

ನಮಗೆ ಹಲವಾರು ಹಲಬದಿಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿಕೊಡಲು ಹುಬ್ಬಳ್ಳಿಯ ಶರಣಪ್ಪ ಮತ್ತು ಆತನ ಚಿಕ್ಕಪ್ಪನ ಮಗ ಮೈಸೂರಿನ ಸಿದ್ದೇಶ್ ಎಂಬ ಹುಡುಗರಿದ್ದಾರೆ, ಬನ್ನಿ ಅವರ ಮಾತಲ್ಲೇ ಹಲವು ಆಕಾರದ ಹಲಬದಿಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ…

ಶರಣಪ್ಪ: ನಾನು ಒಂದಿಶ್ಟು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹೆಳ್ತೀನಿ, ನೀನ್ ಅವು ಯಾವ ಆಕಾರದಲ್ಲಯ್ತಿ ಅಂತ ಹೇಳೋ ಸಿದ್ದ.

ಸಿದ್ದೇಶ್: ಸರಿ, ನೀನು ಕೇಳು, ನಾನು ಹೇಳ್ತೀನಿ.

ಶರಣಪ್ಪ: ನೀನು ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಪೇಪರ್, ಟೀವಿನ್ಯಾಗ ನೋಡಿರ್ತೀ ಹೌದಲ್ಲೋ? ಅವುಗಳ ಮುಕಗಳು(ಗೋಡೆಗಳು) ಯಾವ ಆಕಾರದಲ್ಲಯ್ತಿ ?

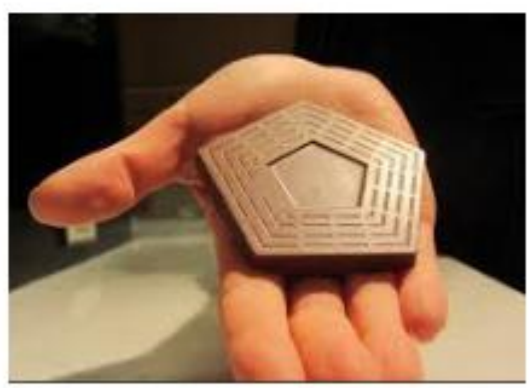
ಸಿದ್ದೇಶ್: ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಮುಕಗಳು ಮೂರ್ಬದಿ ಆಕಾರದಲ್ಲವೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಮೂರು ಬದಿಗಳವೆ.

ಶರಣಪ್ಪ: ಸರಿಯಾಗಿ ಹೇಳ್ದಿ, ಒಂದಿಶ್ಟು ನಾಲ್ಬದಿಯಾಕಾರದ ವಸ್ತುಗಳ ಹೆಸರು ಹೇಳು ನೋಡೋಣ.

ಸಿದ್ದೇಶ್: ಚೆಸ್ ಬೋರ್ಡ್, ನಾಲ್ಬದಿಯಾಕಾರದ ಹೆಂಚು, ಟೈಲ್ಸು, ಮೊಬೈಲ್ ಪೋನ್, ಮೊನ್ನೆ ನಾವು ಹಾರಿಸಿದ್ದ ಗಾಳಿಪಟ!.

ಶರಣಪ್ಪ: ನೀನು ಬಾರಿ ಶಾಣ್ಯಾ ಅದಿ, ಈಗ ಒಂದಿಶ್ಟು ಐದುಬದಿ ಆಕಾರದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹೇಳೋ ಸಿದ್ಯಾ.

ಸಿದ್ದೇಶ್: ನಾವು ಆವತ್ತು ವಾಲಿಬಾಲ್ ಅಡಿದ್ವಲ್ಲ ಅದರ ಮೇಲಿನ ಕೆಂಪು, ಅರಿಶಿಣದ ಪಟ್ಟೆಗಳಿದ್ವಲ್ಲ ಅವು ಐದುಬದಿ ಆಕಾರದಲ್ಲಿವೆ. ನಾವು ಮೊನ್ನೆ ಚಾಕಲೇಟ್ ತಿಂದ್ವಲ್ಲ ಅದು ಐದುಬದಿ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ.



ಸಿದ್ದೇಶ್: ಈಗ ನಾನು ಕೇಳ್ತೀನಿ ನೀನ್ ಹೇಳು ಶರಣಾ, ಒಂದಿಶ್ಟು ಆರುಬದಿ ಆಕಾರದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸು ನೋಡೋಣ.

ಶರಣಪ್ಪ: ಆವತ್ತ ನಮ್ಮನಿ ಪಂಪ್ಸೆಟ್ ರಿಪೇರಿ ಮಾಡಬೇಕಾದ್ರ, ಅದರ ನಟ್ಟು ,ಬೋಲ್ಟು, ಸ್ಪಾನರ್ ಎಲ್ಲಾ ಆರುಬದಿ ಆಕಾರದಲ್ಲೈತಿ ಅಂತ ನೋಡೀನಿ, ಮತ್ತ ಜೇನು ತತ್ತಿ ಗೂಡುಗಳು ಅದಾವಲ್ಲ, ಅವು ಆರುಬದಿ ಆಕಾರದೊಳಗ ಇರ್ತಾವ.


ಸಿದ್ದೇಶ್: ಒಂದಿಶ್ಟು ಏಳುಬದಿ ಆಕಾರದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸು ನೋಡೋಣ, ಶರಣಾ.

ಶರಣಪ್ಪ: ನಮ್ಮ ಬಿಜಾಪುರದ ಕಾಕಾರ ಮನ್ಯಾಗ ಏಳುಬದಿ ಆಕಾರದ ಕಸದ ತೊಟ್ಟಿ ಐತಿ, ನಾನು ಚಾಕ್ಲೇಟ್ ಕವರು, ಹಣ್ಣಿನ್ ಸಿಪ್ಪಿ ಎಲ್ಲಾ ಅದಕ್ಕ ಹಾಕ್ತೀನಿ, ಮತ್ತ ನನಗ ಕಾಕರು ಪಾರಿನ್ ನಾಣ್ಯ ಕೊಟ್ಟಾರ, ಅದ ಏಳುಬದಿ ಆಕಾರದಲ್ಲೈತಿ.


ಶರಣಪ್ಪ: ಈಗ ನಾವು ಒಂದು ಚಲೋ ಕೆಲಸ ಮಾಡೋಣು, ನಮ್ಮನಿ ಪೇಪರ್ನಾಗ ಇರೋ ಹಲವು ಬದಿ ಆಕಾರಗಳನ್ನ ಕತ್ತರಿಸಿ ಅದನ್ನ ಒಂದು ಪೇಪರ್ ಮ್ಯಾಲ ಅಂಟಿಸೋಣು. ಬರ್ತೀಯೋ ಇಲ್ಲೋ.

ಸಿದ್ದೇಶ್: ನೀ ಹೇಳಿದ್ ಮ್ಯಾಲೆ ಇಲ್ಲ ಅನ್ನೋಕಾಗುತ್ತೇನ್ಲಾ !, ಮಾಡೋಣ.

ಟ್ರಾಪಿಕ್ ಸಿಗ್ನಲ್ಸ್, ಹಲವು ಆಕಾರದ ಬಣ್ಣದ ಮಣಿ, ಮನೆ ಗೋಡೆ, ಹಾವು ಏಣಿ ಆಟದ ದಾಳ, ಕಟ್ಟಡ, ಪುಟ್ಬಾಲ್, ಸಿಟಿ ರೋಡು ಪಟ್ಟಿ, ಗಾಜಿನ ಪಿರಮಿಡ್, ಬಣ್ಣದ ಕ್ಯೂಬ್, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬದಿಯಾಕಾರದ ಚಾಕಲೇಟ್ ಎಲ್ಲವನ್ನು ಈಗ ಅಂಟಿಸಿಯಾಯ್ತು.

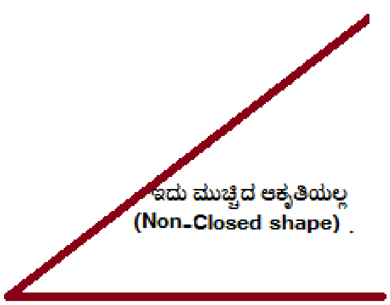
ಇದರಲ್ಲಿ ನಾವು ಮೂರ್ಬದಿ, ನಾಲ್ಬದಿ, ಐದುಬದಿ, ಆರುಬದಿ ಎಂಬ ಹಲವುಬದಿ (Polygon) ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಶರಣಪ್ಪ: ನಾವೀಗ ಒಂದಿಷ್ಟು ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಆತು. ಹಂಗಾದ್ರ ಹಲಬದಿ ಅಂದ್ರ ಏನು ಅಂತ ಹೇಳೊ ಸಿದ್ಯಾ?

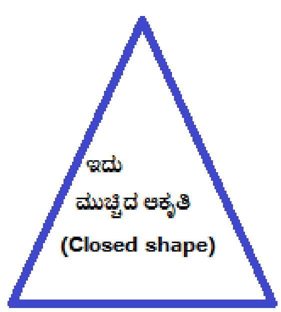
ಸಿದ್ದೇಶ್: ಮೂರು ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮುಚ್ಚಿದ ಆಕಾರಗಳನ್ನು (Closed shapes) ಹಲಬದಿ ಎಂದು ಕರೀತಾರೆ.

ಶರಣಪ್ಪ: ಎರಡು ಬದಿ ಯಾಕ ಹಲಬದಿ ಆಗೋವಲ್ದು ?

ಸಿದ್ದೇಶ್: ಕೆಳ್ಗಡೆ ಎರಡು ಬದಿ ಬಿಡಸ್ತೀನಿ ನೋಡು, ಇಲ್ಲಿ ಎರಡುಬದಿಗಳು ಯಾವುದೇ ಮುಚ್ಚಿದ ಆಕಾರವನ್ನು (Closed shape) ಮಾಡೋದಿಲ್ಲ. ಯಾವುದೇ ಮುಚ್ಚಿದ ಆಕಾರ ಇರ್ಬೇಕು ಅಂದ್ರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಮೂರು ಬದಿಗಳು ಬೇಕೇ ಬೇಕು !. ಕೆಳಗಡೆ ಮೂರ್ಬದಿ (Triangle) ಬಿಡಿಸಿದ್ದೀನಿ ನೋಡು, ಮೂರ್ಬದಿ (Triangle) ಒಂದು ಮುಚ್ಚಿದ ಆಕಾರವಾಗಿದೆ ಇದನ್ನು ಒಂದು ಹಲಬದಿ (Polygon) ಎಂದು ಕರೀಬಹುದು.



ಎರಡು ಬದಿ (Two Side)



ಮೂರ್ಬದಿ (Triangle)

ಈ ಇಬ್ಬರು ಹುಡುಗರು ಸೊಗಸಾಗಿ ಹಲಬದಿಗಳು ಎಂದರೇನು ತಿಳಿಸಿಕೊಟ್ಟರಲ್ಲವೇ ?, ಹಾಗಾದರೆ ಹಲಬದಿಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಹಲವು ಬಗೆಗಳನ್ನಾಗಿಸಬಹುದು ಎಂಬುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಹಲಬದಿಗಳ ಬಗೆಗಳು (Types of Polygons).

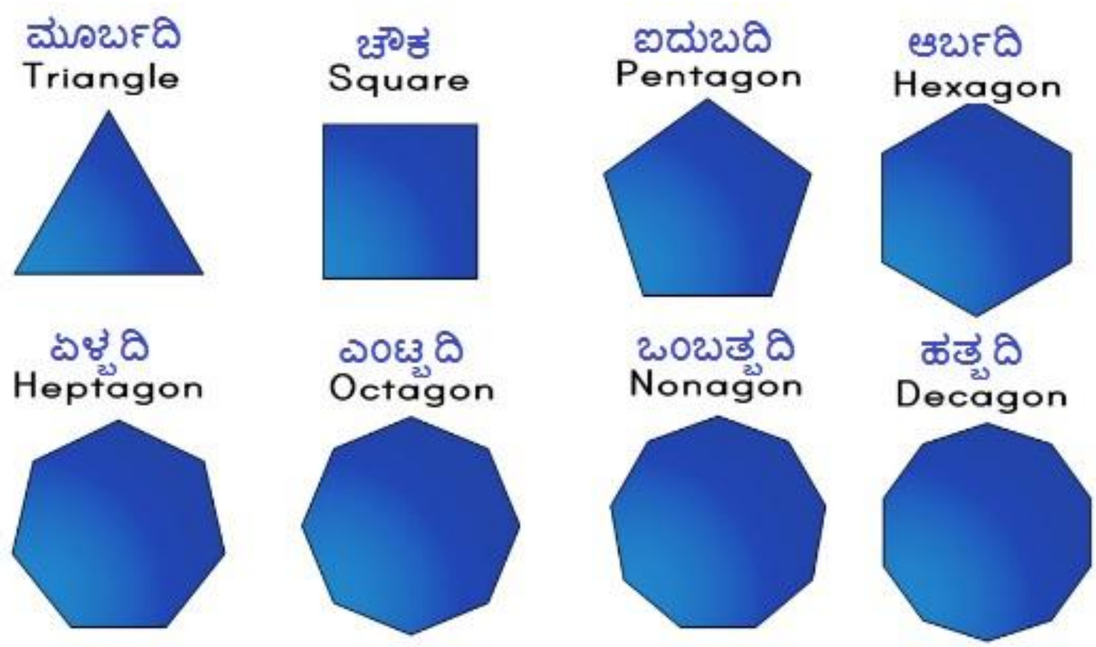
ಹಲಬದಿಗಳನ್ನು ಅದರ ಬದಿಯ ಅಳತೆಗಳ ಮೇಲೆ, ಆಕೃತಿಯ ಉಬ್ಬು ತಗ್ಗುಗಳ ಮೇಲೆ ಹಾಗು ಸುಳುವಾದ, ಸುಳುವಲ್ಲದ ಆಕೃತಿಗಳ ಮೇಲೆ ಒಟ್ಟು ಮೂರು ಬಗೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು.

1. **ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಾಟಿಯಿಲ್ಲದ ಹಲಬದಿಗಳು (Regular and Irregular polygons).**

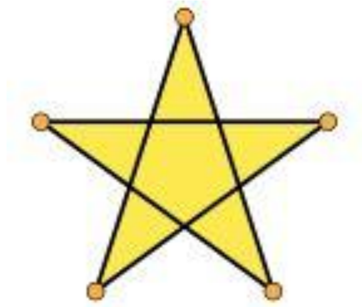
- **ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಗಳು (Regular Polygons):**

ಯಾವುದೇ ಹಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಒಳಮೂಲೆಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು **ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿ** ಎಂದೆನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯನ್ನು(Regular Polygon) ಸರಿಬದಿಯ ಹಲಬದಿ (Equilateral Polygon) ಎಂದೂ ಕರೆಯಬಹುದು ಹಾಗು ಸರಿಮೂಲೆಯ ಹಲಬದಿ (Equiangular Polygon) ಎಂದೂ ಕರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬಗೆಯ ಹಲಬದಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುವುದೇನೆಂದರೆ ಹಲಬದಿಗಳ ಒಂದೊಂದು ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಾಟಿಯಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಬದಿಗಳು ಕೂಡುವೆಡೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಮೂಲೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಾಟಿಯಾಗಿರುತ್ತವೆ, ಹಾಗಾಗಿ ಕೆಳಗಿನವೆಲ್ಲವೂ ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಗಳಾಗಿವೆ.



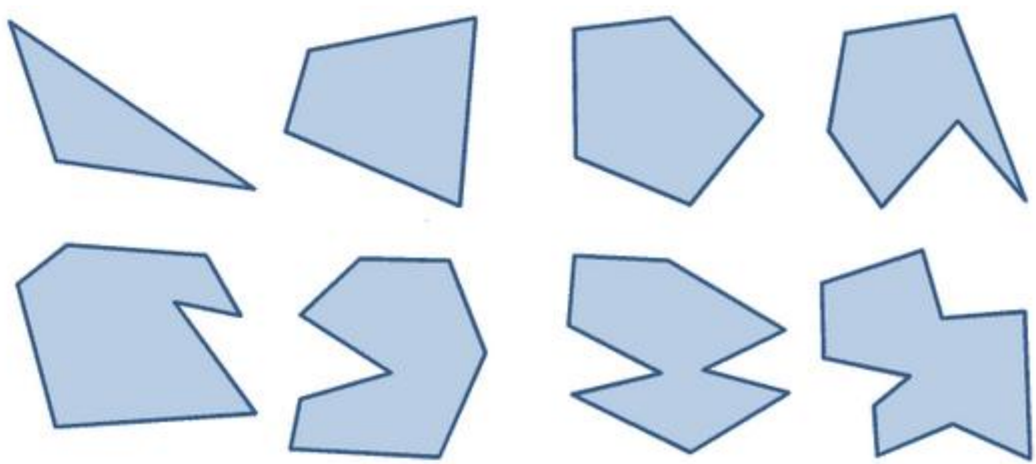
ಉದಾಹರಣೆ 2: ಕಳಗೆ ಒಂದು ಐದು ಮೂಲೆಯುಳ್ಳ **ಅರಿಲು ಹಲಬದಿಯನ್ನು (Star Polygon)** ನೋಡಬಹುದು, ಅವುಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಹಾಗೂ ಅದರ ಒಳಮೂಲೆಗಳು ಕೂಡ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಾಟಿಯಾಗಿವೆ, ಹಾಗಾಗಿ ಅರಿಲು ಹಲಬದಿಯು ಒಂದು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯಾಗಿದೆ (Regular Polygon).



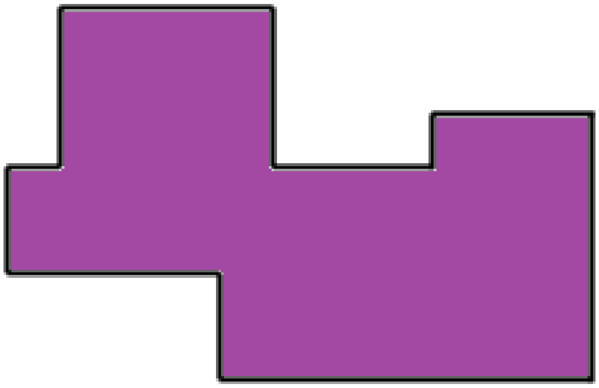
- **ಸಾಟಿಯಲ್ಲದ ಹಲಬದಿಗಳು (Irregular Polygons):**

ಯಾವುದೇ ಹಲಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಳಮೂಲೆಗಳು ಕೂಡ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಮೂಲೆಯಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳು **ಸಾಟಿಯಲ್ಲದ ಹಲಬದಿ**ಗಳು ಎಂದೆನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬಗೆಯ ಹಲಬದಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುವುದೇನೆಂದರೆ ಹಲಬದಿಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿವೆ ಮತ್ತು ಬದಿಗಳು ಕೂಡುವೆಡೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಮೂಲೆಗಳು ಕೂಡ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿವೆ, ಹಾಗಾಗಿ ಕೆಳಗಿನವೆಲ್ಲವೂ ಸಾಟಿಯಲ್ಲದ ಹಲಬದಿಗಳಾಗಿವೆ.



ಉದಾಹರಣೆ 2: ಕಳಗೆ ಒಂದು ನೇರಡ್ಡಬದಿ ಹಲಬದಿಯನ್ನು (Rectilinear Polygon) ನೋಡಬಹುದು, ಅವುಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ನೇರಡ್ಡವಾಗಿವೆ ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಮೂಲೆಗಳು **90°** ಆಗಿವೆ ಆದರೆ ಬದಿಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ, ಹಾಗಾಗಿ ಈ ಹಲಬದಿಯು ಒಂದು ಸಾಟಿಯಲ್ಲದ ಹಲಬದಿಯಾಗಿದೆ (Irregular Polygon).

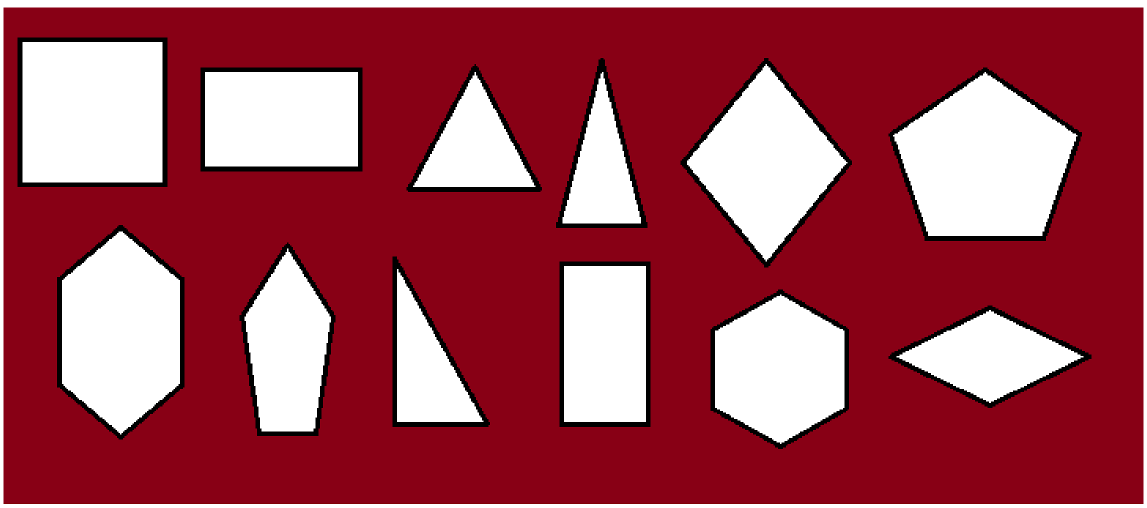


2. ಉಬ್ಬು ಹಲಬದಿಗಳು **(Convex Polygons)** ಮತ್ತು ತಗ್ಗು ಹಲಬದಿಗಳು **(Concave Polygons).**

- **ಉಬ್ಬು ಹಲಬದಿಗಳು (Convex Polygons).**

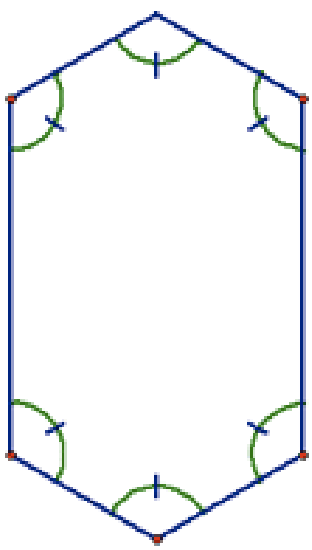
ಯಾವುದೇ ಹಲಬದಿಗಳ ಬದಿಗಳು ಕೂಡುವೆಡೆಯ ಮೂಲೆಗಳು **180°** ಕ್ಕಿಂತ ಕಮ್ಮಿ, ಇಲ್ಲವೇ **180°** ಗೆ ಸರಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳು ಉಬ್ಬು ಹಲಬದಿಗಳು ಎಂದೆನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಕೆಳಗೆ ಹಲವಾರು ಹಲಬದಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ನಮಗೆ ಕಾಣುವುದೇನೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಮೂಲೆಗಳು **180°**ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದೆ, ಅವುಗಳು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಗಳಾಗಿರಬಹುದು (Regular Polygons) ಇಲ್ಲವೇ ಸಾಟಿಯಲ್ಲದ (Irregular Polygons) ಹಲಬದಿಗಳಾಗಿರಬಹುದು ಕೂಡ.



ಉದಾಹರಣೆ 2: ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎಂಟ್ಬದಿ (Octogon) ಆಕಾರದ ಟ್ರಾಪಿಕ್ ಗುರುತು ಒಂದು ಹಲಬದಿಯಾಗಿದೆ (Polygon), ಇದರ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಕೂಡುವೆಡೆ ಉಬ್ಬಿಕೊಂಡಿದೆ (Convex) ಅಂದರೆ ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳು **180°** ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದೆ, ಹಾಗಾಗಿ ಇದು ಒಂದು ಉಬ್ಬಿದ ಹಲಬದಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರಿಮೂಲೆಯ ಹಲಬದಿಯನ್ನು (Equiangular Polygon) ನೋಡಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಮೂಲೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಾಗಿದೆ ಹಾಗು ಮೂಲೆಗಳು **180°** ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ಉಬ್ಬಿದ ಹಲಬದಿಯಾಗಿದೆ (Convex Polygon)

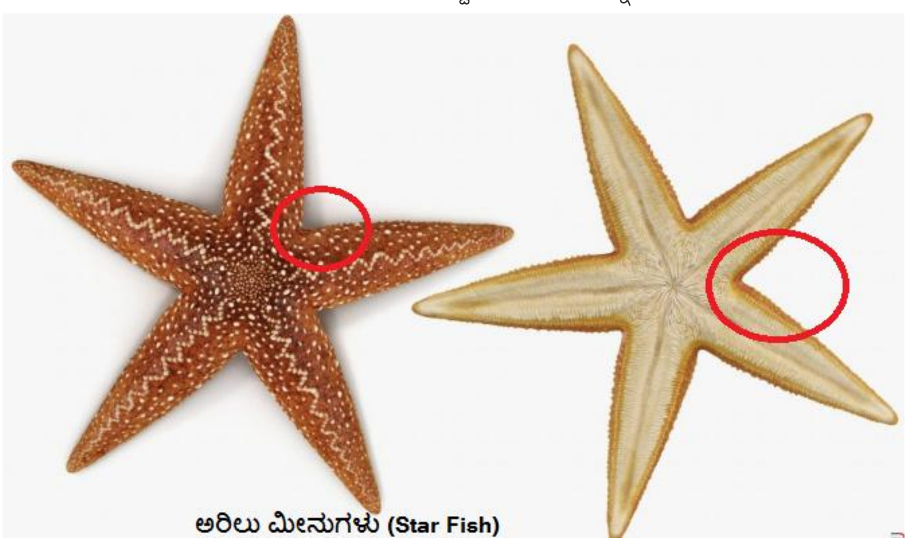


- **ತಗ್ಗು ಹಲಬದಿಗಳು (Concave Polygons):**

ಯಾವುದೇ ಹಲಬದಿಗಳ ಬದಿಗಳು ಕೂಡುವೆಡೆಯ ಮೂಲೆಗಳು **180°** ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳು ತಗ್ಗು ಹಲಬದಿಗಳು ಎಂದೆನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಕೆಳಗೆ ಹಲವಾರು ಹಲಬದಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ನಮಗೆ ಕಾಣುವುದೇನೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಕೆಲವು ಮೂಲೆಗಳು **180°** ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿದೆ, ಅವುಗಳು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಗಳಾಗಿರಬಹುದು (Regular Polygons) ಇಲ್ಲವೇ ಸಾಟಿಯಲ್ಲದ (Irregular Polygons) ಹಲಬದಿಗಳಾಗಿರಬಹುದು ಕೂಡ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಈಜಾಡುತ್ತಿರುವ ಈ ಅರಿಲು ಮೀನುಗಳು (Star Fish) ತಗ್ಗು ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಹೌದು, ಅದರ ಬದಿಗಳು ಕೂಡುವೆಡೆಗಳು **180**° ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

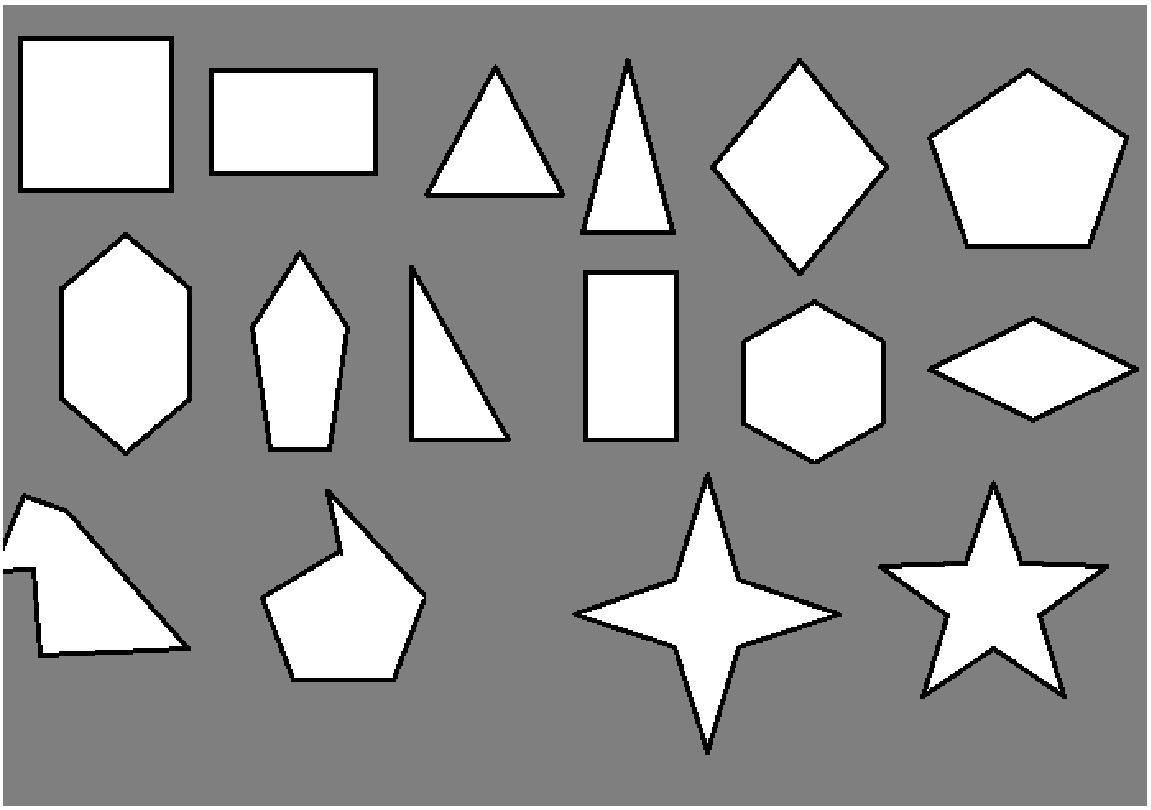


3. ಸುಳುವಾದ (Simple) ಮತ್ತು ಸುಳುವಲ್ಲದ (Complex) ಹಲಬದಿಗಳು.

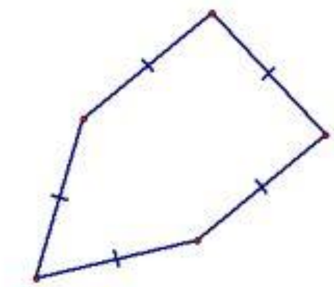
- **ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಗಳು (Simple Polygons)**

ಯಾವುದೇ ಹಲಬದಿಯು ಒಂದೊಕ್ಕೊಂದು ಕತ್ತರಿಸುವ ಬದಿಗಳನ್ನು (Sides are not intersecting each other) ಹೊಂದಿರದಿದ್ದರೆ ಅದು ಸುಳುವಾದ (Simple) ಹಲಬದಿಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಮೂರ್ಬದಿ , ಚೌಕ, ಆಯತ ಮತ್ತು ಹಲವು ಬಗೆಯ ನಾಲ್ಬದಿಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಕೆಳಗೆ ಹಲವಾರು ಹಲಬದಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ, ಈ ಎಲ್ಲಾ ಹಲಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವುದೇನೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಬದಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯ ಮೇಲೆ ಹಾದುಹೋಗಿಲ್ಲ, ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕತ್ತರಿಸಿಲ್ಲ, ಹಾಗಾಗಿ ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಗಳಾಗಿವೆ.



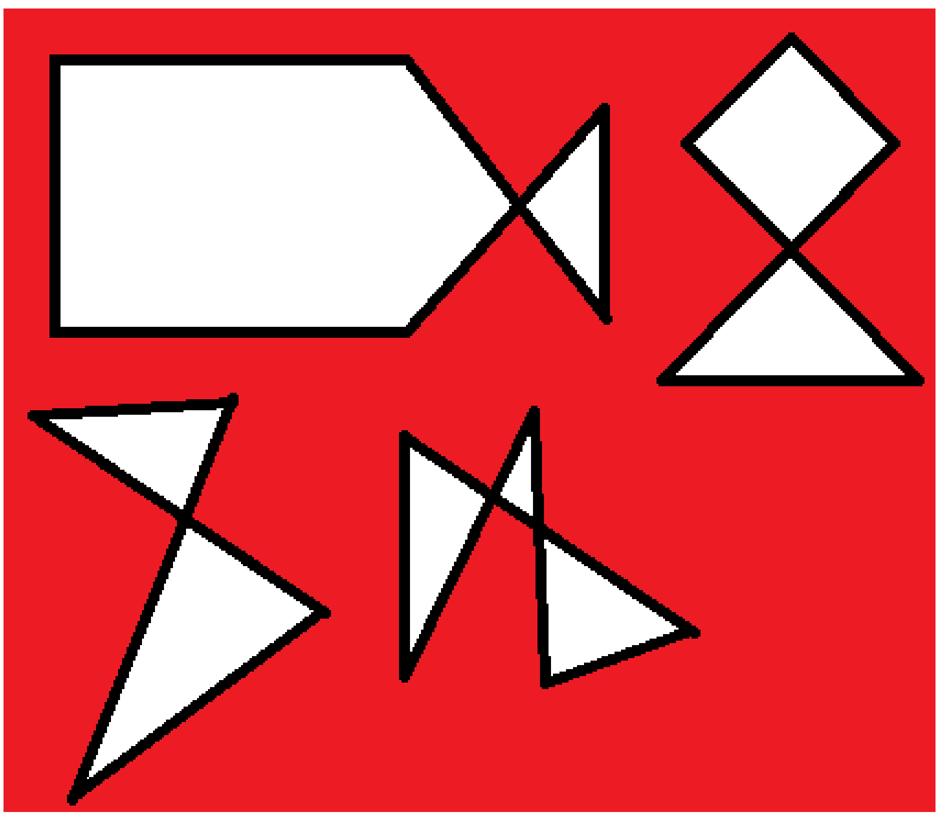
ಉದಾಹರಣೆ 2: ಈ ಕೆಳಗೆ ಒಂದು **ಸರಿಬದಿಯ ಐದ್ಬದಿಯನ್ನು** ಕೊಡಲಾಗಿದೆ **(Equilateral Pentagon)**, ಇದರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಹಾಗು ಅದರ ಯಾವುದೇ ಬದಿಗಳು ಒಂದರಮೇಲೊಂದು ಹಾದುಹೋಗಿಲ್ಲ, ಹಾಗಾಗಿ ಇದು ಒಂದು ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಯಾಗಿದೆ.



❖ **ಸುಳುವಲ್ಲದ ಹಲಬದಿಗಳು (Complex Polygons)**

ಯಾವುದೇ ಹಲಬದಿಯ ಬದಿಗಳು ಒಂದೊಕ್ಕೊಂದು ಕತ್ತರಿಸುವ ಬದಿಗಳನ್ನು(Sides are intersecting each other) ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದು ಸುಳುವಲ್ಲದ (Complex) ಹಲಬದಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಗಳಾಗಿರಬಹುದು (Regular Polygons) ಇಲ್ಲವೇ ಸಾಟಿಯಲ್ಲದ ಹಲಬದಿಗಳಾಗಿರಬಹುದು (Irregular Polygons).

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಕೆಳಗೆ ಹಲವು ಸುಳುವಲ್ಲದ ಹಲಬದಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಬದಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕತ್ತರಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ.



ಮುಂದಿನ ಬರಹದಲ್ಲಿ ಹಲಬದಿಗಳ ಮೂಲೆಗಳು, ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಬಗೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

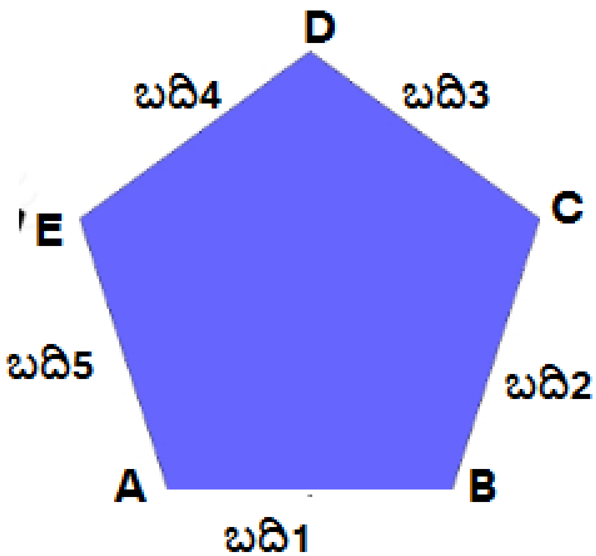
7. ಹಲಬದಿಗಳು – ಭಾಗ 2

ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಬರಹದಲ್ಲಿ ಹಲಬದಿಗಳು ಎಂದರೇನು ಮತ್ತು ಹಲಬದಿಯ ಹಲವು ಬಗೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು, ಈಗ ಹಲಬದಿಗಳ ಮೂಲೆ (Angle), ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter) ಮತ್ತು ಹರವನ್ನು (Area) ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಬಗೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಹಲಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter of a polygon):

ಯಾವುದೇ ಹಲಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಾಗಿದೆ.

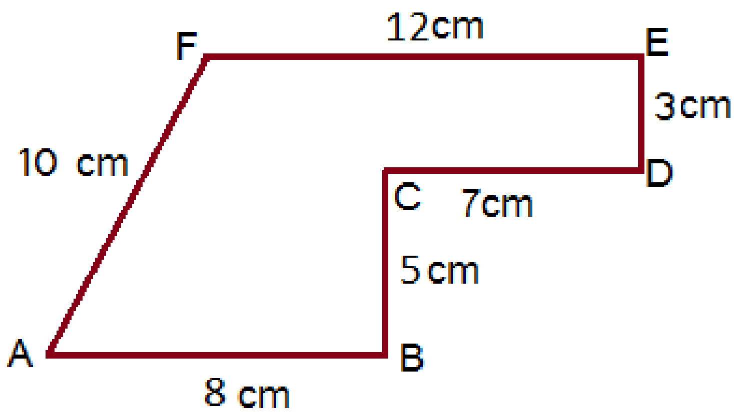
- ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ ಒಂದು **ABCDE** ಐದ್ಬದಿಯನ್ನು (Pentagon) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.



ಐದ್ಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ **P** ಆಗಿರಲಿ, ಬದಿ**1 = AB,** ಬದಿ**2 = BC,** ಬದಿ**3 = CD,** ಬದಿ**4 = DE,** ಬದಿ**5 = EA** ಆದಾಗ

ಐದ್ಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ **P** = ಬದಿ1+ ಬದಿ2 + ಬದಿ3 + ಬದಿ4 + ಬದಿ5 = **AB** + **BC** + **CD** + **DE** + **EA** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

- ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ ಆರುಬದಿಯುಳ್ಳ **ABCDEF** ಎಂಬ ಒಂದು ತಗ್ಗು ಹಲಬದಿಯನ್ನು (Concave Polygon) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.



ಆರುಬದಿಯುಳ್ಳ **ABCDEF** ಈ ತಗ್ಗು ಹಲಬದಿಯಲ್ಲಿ **AB = 8cm, BC = 5cm, CD = 7cm, ED = 3cm, EF = 12cm, FA = 10cm** ಆಗಿವೆ, ಸುತ್ತಳತೆ **P** ಆಗಿರಲಿ.

∴ ಆರುಬದಿಯುಳ್ಳ **ABCDEF** ಹಲಬದಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ **P = AB + BC + CD + DE + EF + FA = 8 + 5 + 7 + 3 + 12 + 10 = 45 cm** ಆಗಿದೆ.

- ಯಾವುದೇ ಹಲಬದಿಯ ಬದಿಗಳು **n** ಆದಾಗ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ **P = ಬದಿ1 + ಬದಿ2 + ಬದಿ3 + …+ …+ ಬದಿn-1 + ಬದಿn** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅದನ್ನು ಇನ್ನು ಸುಳುವಾಗಿ $P = \sum_{i=1}^{n} \text{ಬದಿ}_i$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು, ಇಲ್ಲಿ **i = 1,2,3……n, n** ಎಂಬುವುದು ಹಲಬದಿಯು ಎಷ್ಟು ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

- ಒಂದು ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಯು (Simple Polygon) ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯಾದಾಗ (Regular Polygon) ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು **P= n x s =ಒಟ್ಟು ಬದಿಗಳು x ಒಂದು ಬದಿಯ ಅಳತೆ** ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ **n -> ಒಟ್ಟು ಬದಿಗಳು.**

s -> ಒಂದು ಬದಿಯ ಅಳತೆ.

ಹಲಬದಿಯ ಒಳ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು (Interior Angles) ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಬಗೆ:

- ಯಾವುದೇ ಹಲಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವು **$(n - 2)\ \pi^c$** ಆಗಿರುತ್ತದೆ,

ಇಲ್ಲಿ **c** ಗುರುತು ರೇಡಿಯನ್ಸ್ (Radians) ಅನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ, ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್ ಅನ್ನು **1^c** ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

1^c ನ ಬೆಲೆ **$180°/\pi$** ಆಗಿರುತ್ತದೆ,

∴ **$\pi^c = 180°$** ಆಗಿದೆ, ಇಲ್ಲಿ **$\pi = 3.14159$ ಆಗಿದೆ.**

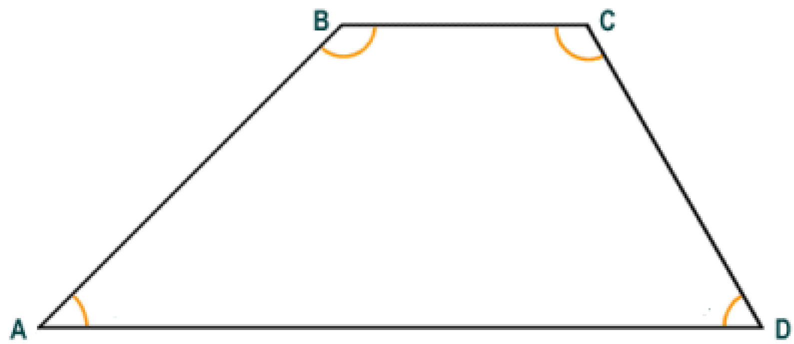
∴ ಹಲಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು **$(n - 2) \times 180°$** ಎಂದು ಸುಳುವಾಗಿ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ **n** ಎಷ್ಟು ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂಬುವುದಾಗಿದೆ.

ಹಲಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ ವನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯು (Equation) ಉಬ್ಬು ಹಲಬದಿ (Convex Polygon) ಮತ್ತು ತಗ್ಗು ಹಲಬದಿಗೂ (Concave Polygon) ಸರಿಹೊಂದುತ್ತುದೆ.

ಒಂದು ಹಲಬದಿಯು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯಾದಾಗ (Regular Polygon) ಅದರ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಮೂಲೆಯು **$180° – 360°/n$** ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ **n** ಎಷ್ಟು ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂಬುವುದಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ1: ಕೆಳಗೆ ಒಂದು **ABCD** ನಾಲ್ಬದಿಯನ್ನು (Quadrilateral) ಕೊಡಲಾಗಿದೆ, ಇದರ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

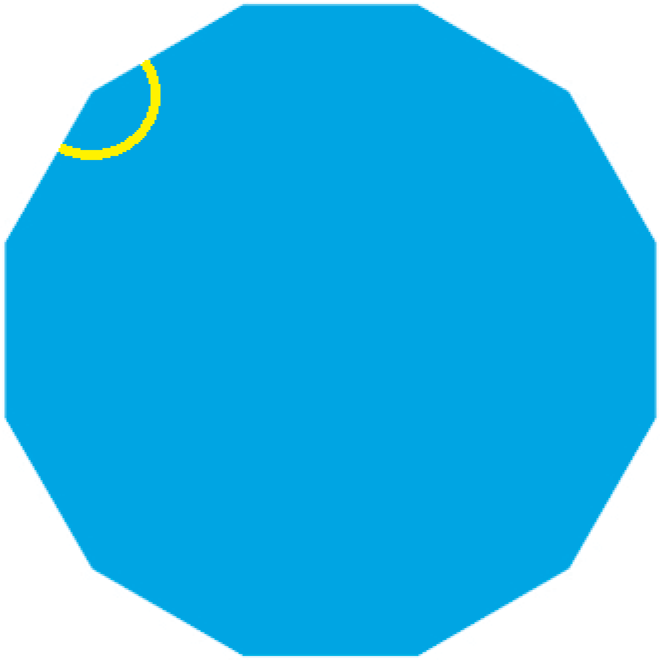


ನಾವು ಮೇಲೆ ತಿಳಿದಂತೆ ಯಾವುದೇ ಹಲಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವು **$(n – 2) × 180°$** ಆಗಿದೆ,

ಒಂದು ನಾಲ್ಬದಿಯೆಂದರೆ ಅದು ನಾಲ್ಕು ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ, ಹಾಗಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ **$n = 4$** ಆಗುತ್ತದೆ.

∴ **ABCD** ನಾಲ್ಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ **$\angle BAD + \angle ADC + \angle DCB + \angle CBA = (n – 2) × 180° = (4 – 2) \times 180° = 2 \times 180 = 360°$** ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ2: ಕೆಳಗೆ ಒಂದು ಸಾಟಿ ಹನ್ನೆರಡುಬದಿಯನ್ನು(Regular Dodecagon) ಕೊಡಲಾಗಿದೆ, ಇದರ ಒಳ ಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಮೂಲೆಯ ಬೆಲೆಯೇನು ?



ನಾವು ಮೇಲೆ ತಿಳಿದಂತೆ ಯಾವುದೇ ಹಲಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವು **(n – 2) × 180°** ಆಗಿದೆ**,**

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರವು ಹನ್ನೆರಡು ಬದಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಆಕಾರವಾಗಿದೆ, ಹಾಗಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ **n** = **12** ಆಗುತ್ತದೆ.

∴ ಸಾಟಿ ಹನ್ನೆರಡುಬದಿಯ ಒಳಮೂಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ = **(n – 2) × 180° = (12 – 2) x 180° = 1800°** ಆಗಿದೆ.

ಈ ಹನ್ನೆರಡುಬದಿಯು(Dodecagon) ಒಂದು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯಾಗಿದೆ (Regular Polygon), ಅಂದರೆ ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ (Equilateral) ಹಾಗು ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ (Equiangular).

ನಾವು ಮೇಲೆ ತಿಳಿದಂತೆ ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ (Regular Polygon) ಒಂದು ಮೂಲೆಯು **180° – 360°/n** ಆಗಿರುತ್ತದೆ**.**

∴ ಸಾಟಿ ಹನ್ನೆರಡುಬದಿಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಮೂಲೆ = **180° – 360°/n = 180°- 360°/12 = 180° – 30° = 150°**ಆಗಿರುತ್ತದೆ**.**

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಒಂದು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ ಯಾವುದೇ ಮೂಲೆಯು 162° ಆಗಿದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯು ಎಷ್ಟು ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ ಯಾವುದೇ ಮೂಲೆಯು 162° ಆಗಿದೆ.

ನಾವು ಮೇಲೆ ತಿಳಿದಂತೆ ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ (Regular Polygon) ಒಂದು ಮೂಲೆಯು **180° – 360°/n** ಆಗಿರುತ್ತದೆ**.**

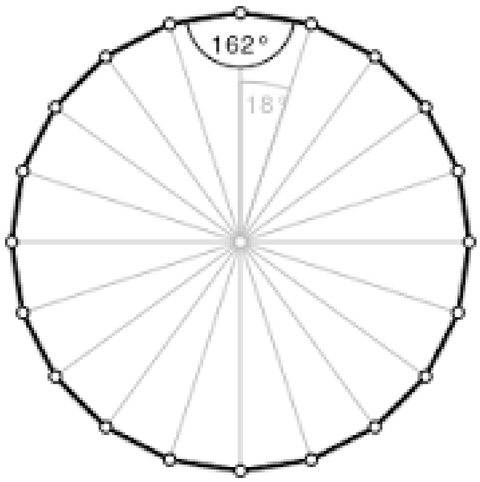
ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆ = **180° – 360°/n** = 162°, ಇಲ್ಲಿ **n** ಎಂಬುವುದು ಅದರ ಒಟ್ಟು ಬದಿಗಳಾಗಿವೆ, ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬಿಡಿಸೋಣ

180° – 162° = 360°/n

18° = 360°/n

n = 360°/18 = 20

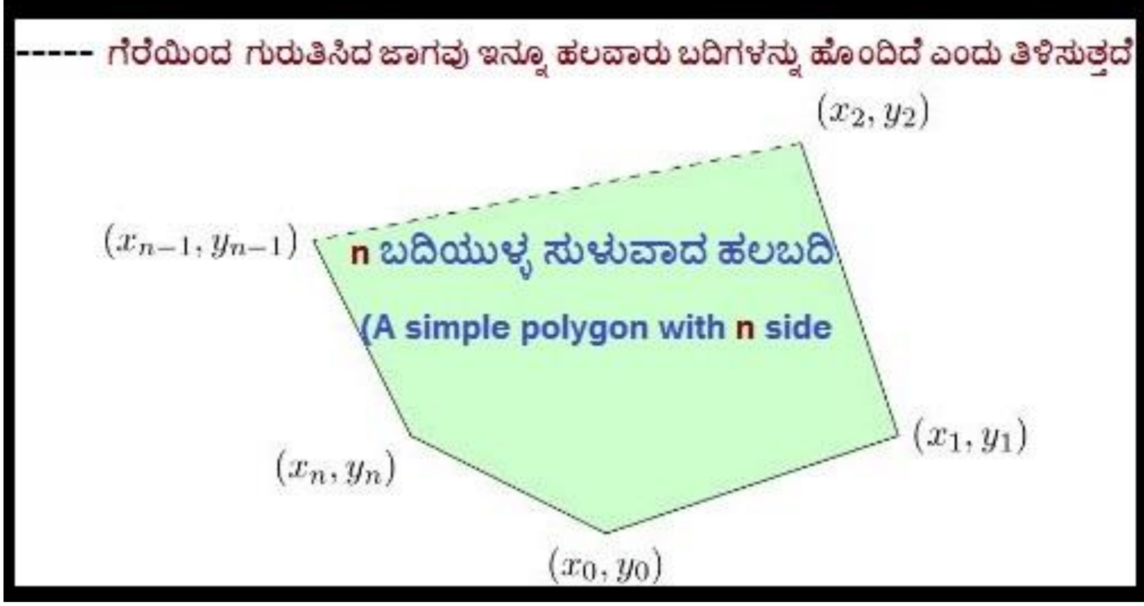
∴ ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆ **162°** ಆದಾಗ ಅದು **20** ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ, ಈ ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯನ್ನು ಇಪ್ಪತ್ತುಬದಿ **(Icosagon)** ಆಕಾರ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.



ಹಲಬದಿಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಬಗೆ (Area of a Polygon):

ಮೂರ್ಬದಿ ಆಕಾರವು ಮೂರು ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ, ಆಯತ, ಚೌಕ ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ನಾಲ್ಕುಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ, ಹಾಗಾಗಿ ಇವುಗಳ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸುಲಭ, ಆದರೆ ಇವುಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬದಿ ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯ ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ಚುಕ್ಕೆಗುರುತಿನ ಏರ್ಪಾಡನ್ನು (coordinate system) ಬಳಸಿ ಎಲ್ಲಾ ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಗಳಿಗೆ ಒಗ್ಗುವಂತೆ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots + x_{n-1} y_n + x_n y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \cdots - x_n y_{n-1} - x_1 y_n\right|
\end{aligned}
$$



- **n:** ಬದಿಗಳು
- **x,y:** ಹಲಬದಿಯ ತುದಿಗಳ ಚುಕ್ಕೆಗುರುತುಗಳು (Coordinates of polygon vertices)
- **k: 1, 2, 3, 4, …, n-1, n**
- ಇಲ್ಲಿ ಹರವು ಕಳೆಯುವ ಗುರುತನ್ನು (Negative Symbol) ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಕೂಡು ಗುರುತಿಗೆ(Positive Symbol) ಮಾರ್ಪಾಟು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು, ಅದಕ್ಕೆ ದಿಟಬೆಲೆ ಗುರುತನ್ನು(absolute value/modulus/real number) ಬಳಸಬೇಕು,
- ಉದಾಹರಣೆಗೆ -6 -> |6| -> 6, ಹಾಗಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಗೆ **| |** ಗುರುತನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ

ಕೇಳ್ವಿ 1: ಒಂದು ಹಲಬದಿಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಇಷ್ಟು ದೊಡ್ಡದಾದ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು (equation) ಬಳಸಬೇಕೇ?

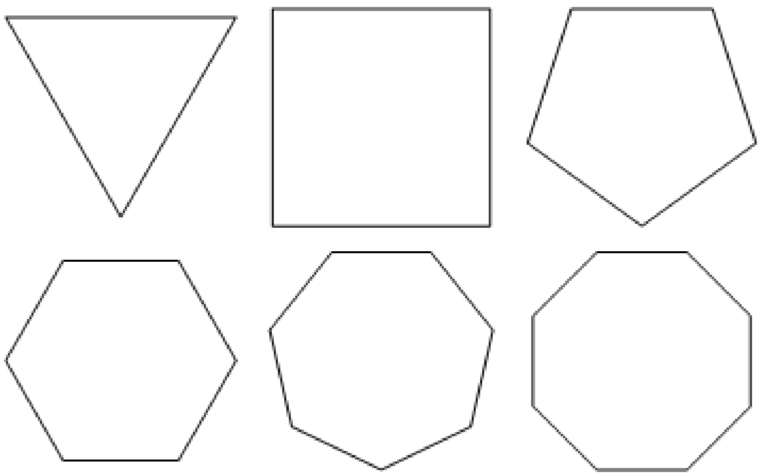
ಉತ್ತರ: ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಬದಿ ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯ ಬದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು, ಮೂರ್ಬದಿ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿ ಆಕಾರಗಳು ಕಡಿಮೆ ಬದಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬೇರೆ ಬಗೆಯಾಗಿ ಅವುಗಳ ಹರವನ್ನು
ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. **ಮೂರ್ಬದಿಗಳ ಹರವನ್ನು** ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಈ ಬರಹವನ್ನು ಓದಿ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಬದಿಗಳ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಈ ಬರಹವನ್ನು ಓದಿ.

ಕೇಳ್ವಿ 2: ಒಂದು ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಯು (Simple Polygon) ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯಾದಾಗ (Regular Polygon) ಮೇಲಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನುಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೇ ?

ಉತ್ತರ: ಒಂದು ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಯು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯಾದಾಗ ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ (Equilateral) ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯನ್ನು(Equiangular) ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಕೂಡ.

ಆ ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಮೇಲಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯ ಬದಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹದು.

- ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಆಕಾರಗಳು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಗಳಾಗಿವೆ (Regular Polygons).



- ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ ಹರವು **A = 1/2 x (pa)** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ **p ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter)**

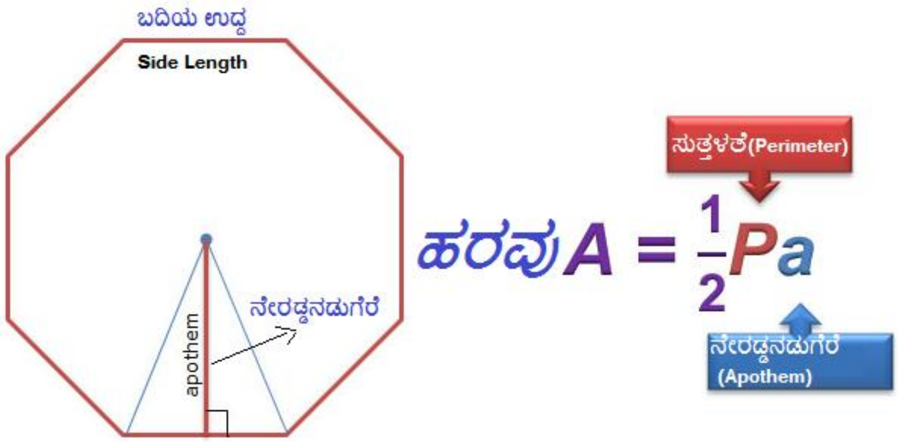
a ನೇರಡ್ಡನಡುಗೆರೆ (Apothem)

ಹರವನ್ನು **A = 1/2 x (pa) = 1/2 x (nsa)** ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು, ಏಕೆಂದರೆ ಸುತ್ತಳತೆ **P= n x s**

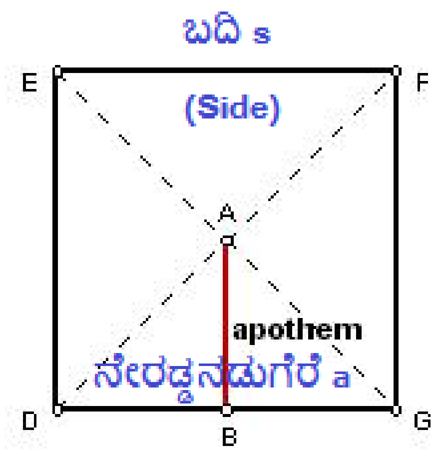
= **ಒಟ್ಟು ಬದಿಗಳು x ಒಂದು ಬದಿಯ ಅಳತೆ**ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ನೇರಡ್ಡನಡುಗೆರೆ (Apothem) ಎಂದರೆ ಒಂದು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ ನಡುವಿಂದ ಅದರ ಒಂದು ಬದಿಗೆ ನೇರಡ್ಡವಾಗಿ ಎಳೆದ ಗೆರೆ.

- ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ ಒಂದು ಸಾಟಿ ಎಂಟ್ಬದಿಯನ್ನು (Octagon) ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ ಹರವಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು (Equation of area of regular polygon) ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೋರಿಸಬಹುದು.



ಉದಾಹರಣೆ 1: ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಚೌಕದ ಹರವು **ಬದಿ x ಬದಿ** ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ಬದಿಗಳು **(n=4)** ಒಂದೇ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

∴ **ED = DG = GF = FE = s**

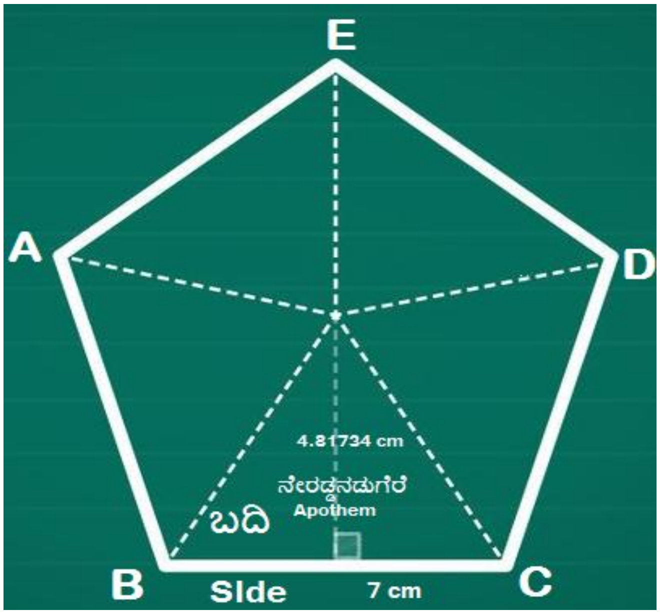
ಚೌಕದ ನೇರಡ್ಡನಡುಗೆರೆಯ ಉದ್ದವು (length of apothem) ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿಯ ಅರೆಪಾಲಿನ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

∴ ನೇರಡ್ಡನಡುಗೆರೆ **a = s/2,** ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆ

A = 1/2 x (pa) = 1/2 x (nsa) = 1/2 x (ಒಟ್ಟು ಬದಿಗಳು x ಬದಿಯ ಉದ್ದ x ನೇರಡ್ಡನಡುಗೆರೆಯ ಉದ್ದ)

∴ **A = 1/2 x 4 x s x s/2 =2 x s x s/2 = s x s = ಬದಿ x ಬದಿ** ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಒಂದು ಸಾಟಿ ಐದ್ಬದಿಯ (Regular Pentagon) ಬದಿಗಳು **7 cm** ಆಗಿವೆ ಮತ್ತು ಅದರ ನೇರಡ್ಡನಡುಗೆರೆ **4.81734 cm** ಆದಾಗ ಅದರ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಸಾಟಿ ಐದ್ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ಬದಿಗಳು **(n=5)** ಒಂದೇ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

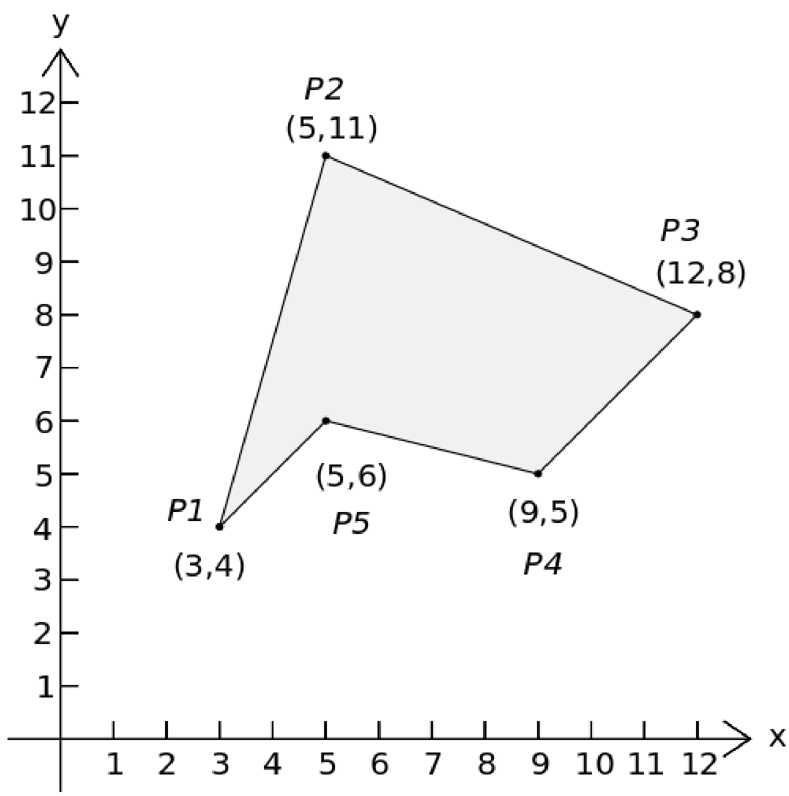
ಸಾಟಿ ಹಲಬದಿಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆ.

A = 1/2 x (pa) = 1/2 x (nsa) = 1/2 x (ಒಟ್ಟು ಬದಿಗಳು x ಬದಿಯ ಉದ್ದ x ನೇರಡ್ಡನಡುಗೆರೆಯ ಉದ್ದ)

∴ A = 1/2 x (5 x 7 x 4.81734) = 1/2 x (168.6069) = 84.30345 cm.

∴ ಸಾಟಿ ಐದ್ಬದಿಯ ಹರವು **A = 84.30345 cm.**

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಒಂದು ಸಾಟಿಯಲ್ಲದ ಹಲಬದಿ **P1P2P3P4P5** ಯನ್ನು ಚುಕ್ಕೆಗುರುತಿನ ಏರ್ಪಾಟಿನಲ್ಲಿ (coordinate system) ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಗುರುತಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಈ ಹಲಬದಿಯ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



- ಸಾಟಿಯಿಲ್ಲದ ಹಲಬದಿಯ ತುದಿಗಳನ್ನು(Vertices) ಚುಕ್ಕೆಗುರುತಿನ ಏರ್ಪಾಟಿನಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ
- ಈ ಚುಕ್ಕೆಗುರುತುಗಳು(Coordinates) ಹೀಗಿವೆ **P1(3,4), P2(5,11), P3(12,8), P4(9,5)** ಮತ್ತು **P5(5,6).**
- ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಹಲಬದಿಯು ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಯಾಗಿದೆ (Simple Polygon) ಮತ್ತು ಸಾಟಿಯಿಲ್ಲದ ಹಲಬದಿಯಾಗಿದೆ

  (Irregular Polygon)
- ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ ಸುಳುವಾದ ಹಲಬದಿಯ (Simple polygon) ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆ (Equation).

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots + x_{n-1} y_n + x_n y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \cdots - x_n y_{n-1} - x_1 y_n\right|$$

P = { P1(x1,y1),P2(x2,y2),P3(x3,y3),P4(x4,y4),P5(x5,y5)} = {P1(3,4),P2(5,11),P3(12,8),P4(9,5) P5(5,6)} ಎಂದು ಹೊಂದಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}|3 \times 11 + 5 \times 8 + 12 \times 5 + 9 \times 6 + 5 \times 4 - 4 \times 5 - 11 \times 12 - 8 \times 9 - 5 \times 5 - 6 \times 3|$$

∴ ಸಾಟಿಯಲ್ಲದ ಹಲಬದಿ **P1P2P3P4P5** ಯ ಹರವು $A = \frac{|-60|}{2} = \frac{60}{2} = 30$

ಹರವಿನ ಬೆಲೆ ಕಳೆಯುವ ಗುರುತನ್ನು (Negative Symbol) ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, **| |** (Real/Absolute number symbol) ಗುರುತನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ: ನಮ್ಮ ದಿನ ನಿತ್ಯದ ಬದುಕಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣುವ ಎಲ್ಲಾ ಹಲಬದಿ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಯಾವ ಯಾವ ಬಗೆ ಯಹಲಬದಿಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿ (ಹಿಂದಿನ ಬರಹ ಹಲಬದಿಗಳು –ಭಾಗ 1 ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು)

ಸೆಲೆಗಳು: dummies.com/education, easycalculation.com, math.blogoverflow.com, wikipedia.org

8. ಉದ್ದದುಂಡು

ನಾವು ದಿನಾಲೂ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ **ಉದ್ದದುಂಡು** (Ellipse) ಆಕಾರದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿರುತ್ತೇವೆ, ಅವುಗಳು ಉದ್ದದುಂಡು ಆಕಾರದ ಗಡಿಯಾರಗಳು, ಕನ್ನಡಿಗಳು, ಚೆಂಡುಗಳು, ಕಲ್ಲುಗಳು, ತಟ್ಟೆಗಳು, ಕುಂಬಳಕಾಯಿ, ಕ್ಯಾಪ್ಸೂಲ್ ಮಾತ್ರೆಗಳು ಇನ್ನಿತರ ಹತ್ತು ಹಲವಾರು ವಸ್ತುಗಳಾಗಿರಬಹುದು.

ಉದ್ದದುಂಡು ಆಕಾರ ಎಂದರೇನು?.

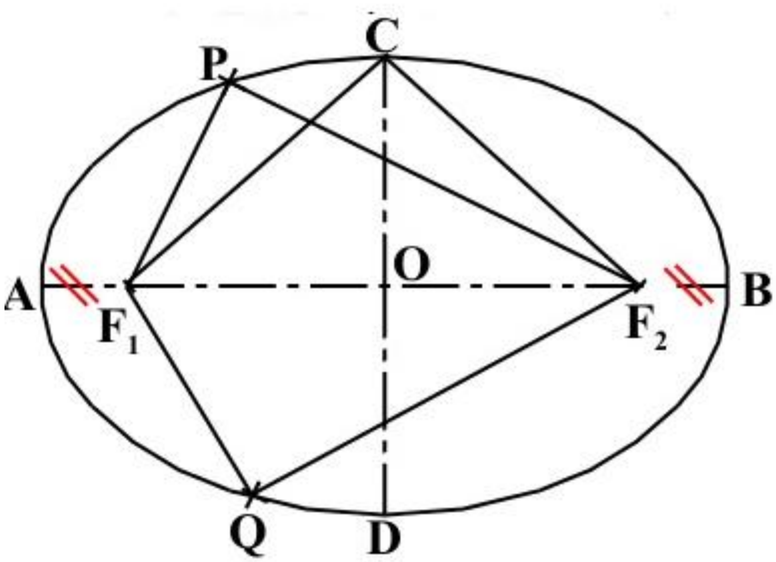
ಉದ್ದದುಂಡು ಆಕಾರವೆಂದರೆ ನಮ್ಮ ತಲೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೊಳೆಯುವುದೇನೆಂದರೆ.

- ಸ್ವಲ್ಪ ಚಪ್ಪಟೆಯಾದ ದುಂಡಾಕಾರದ ವಸ್ತು.
- ಒಂದು ದುಂಡಾಕಾರದ ವಸ್ತುವನ್ನು ಹಿಗ್ಗಿಸಿದಂತೆ ಇಲ್ಲವೇ ಎಳೆದಂತೆ ಕಂಡು ಬರುವ ಆಕಾರ.
- ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಮೊಟ್ಟೆಯನ್ನು ಹೋಲುವ ಆಕಾರ.

ಎಣಿಕೆಯರಿಮೆ (ಗಣಿತ) ಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಹೇಳಬಹುದು.

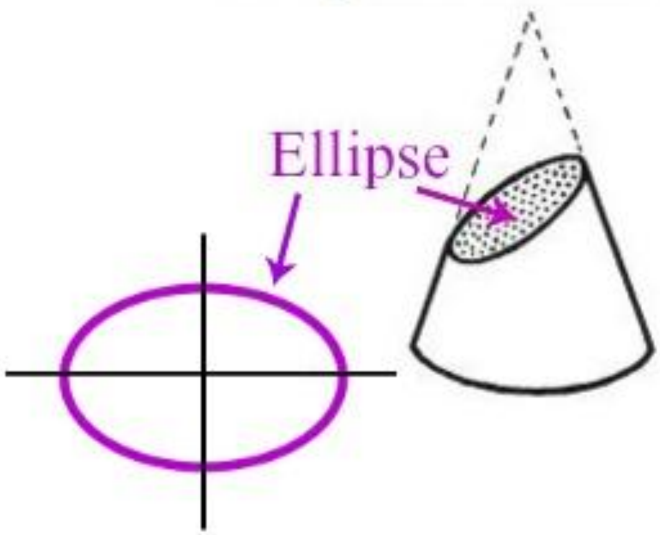
- **ಹೇಳಿಕೆ 1:** ಉದ್ದದುಂಡು ಒಂದು ಮುಚ್ಚಿದ ಆಕೃತಿಯಾಗಿದೆ (Closed Shape), ಇದರ ಒಳಗಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ನೆಲೆಚುಕ್ಕೆಯಿಂದ (Focus Points) ಅದರ ಮೇಲ್ಮಯ್ಯಿಯ ತಿರುಗುಚುಕ್ಕೆಗೆ (Loucs Points) ಎಳೆದ ಗೆರೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ನೆಲೆಬೆಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ (Constant value).

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.



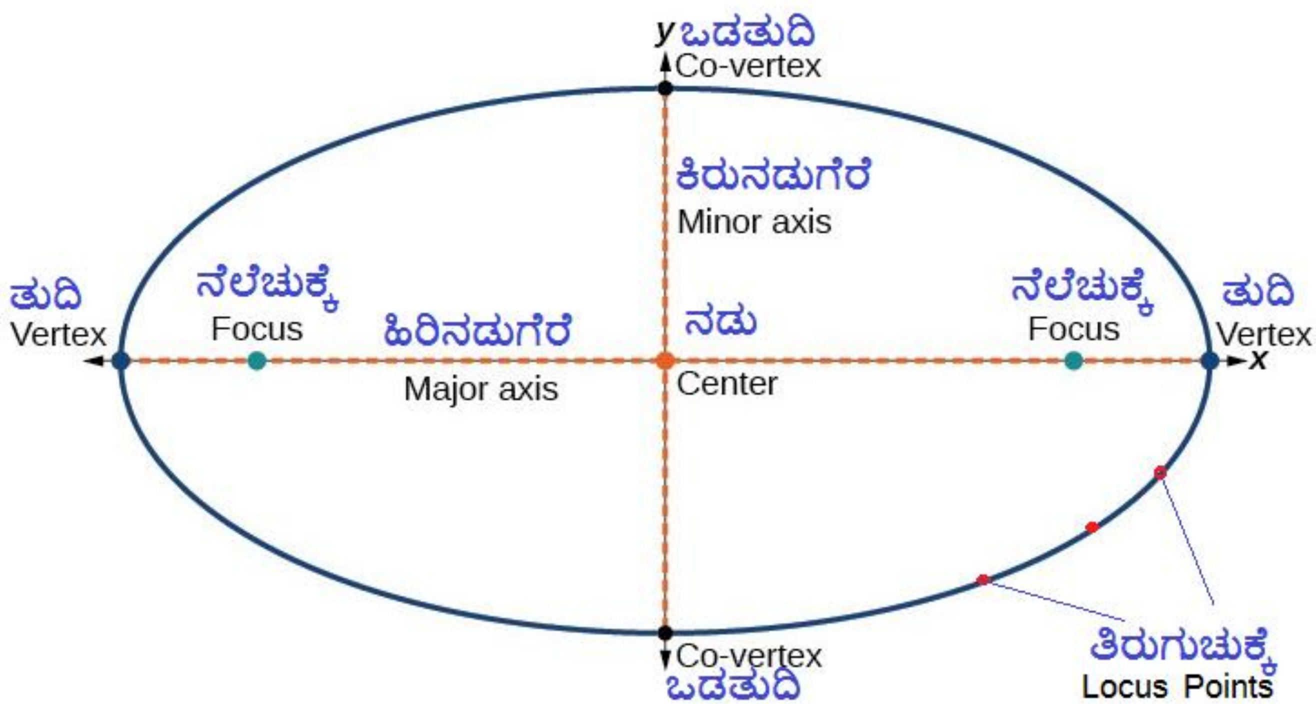
- ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರವು ಒಂದು ಉದ್ದದುಂಡು (ellipse) ಆಗಿದೆ.
- ಉದ್ದದುಂಡು ಆಕಾರದ ಒಳಗೆ **F1** ಮತ್ತು **F2** ಎಂಬ ಎರಡು ನೆಲೆಚುಕ್ಕೆಗಳಿವೆ (Focal points)
- ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಮೇಲೆ **Q, P** ಮತ್ತು **C** ಎಂಬ ಮೂರು ತಿರುಗುಚುಕ್ಕೆಗಳನ್ನು (Locus Points) ಇಡಲಾಗಿದೆ.
- ತಿರುಗುಚುಕ್ಕೆ **Q** ಯಿಂದ **F1** ಮತ್ತು **F2** ನೆಲೆಚುಕ್ಕೆಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಗೆರೆಗಳು **F1Q** ಮತ್ತು **F2Q** ಆಗಿವೆ.
- ತಿರುಗುಚುಕ್ಕೆ **P** ಯಿಂದ **F1** ಮತ್ತು **F2** ನೆಲೆಚುಕ್ಕೆಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಗೆರೆಗಳು **F1P** ಮತ್ತು **F2P** ಆಗಿವೆ.
- ತಿರುಗುಚುಕ್ಕೆ **C** ಯಿಂದ **F1** ಮತ್ತು **F2** ನೆಲೆಚುಕ್ಕೆಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಗೆರೆಗಳು **F1C** ಮತ್ತು **F2C** ಆಗಿವೆ.
- ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯಂತೆ **F1Q + F2Q = F1P + F2P = F1C + F2C = 2a** ಆಗಿರುತ್ತದೆ**,** ಇಲ್ಲಿ **a** ಎಂಬುವುದು ಒಂದ್ದು ನೆಲೆಬೆಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ (Constant value).

ಹೇಳಿಕೆ 2: ಲಾಳಿಕೆ ಆಕೃತಿಯನ್ನು (Cone shape) ಓರೆಯಾಗಿ ಸೀಳಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವುದೇ ಉದ್ದದುಂಡು. ಹೇಗೆ ಅಂತೀರಾ !?, ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡೋಣ.



ಮೇಲಿನ ಲಾಳಿಕೆಯಾಕೃತಿಯನ್ನು (Cone shape) ಓರೆಯಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಲಾಗಿದೆ, ಅಲ್ಲಿ ಉದ್ದದುಂಡು (Ellipse) ಉಂಟಾಗಿದ್ದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು !.

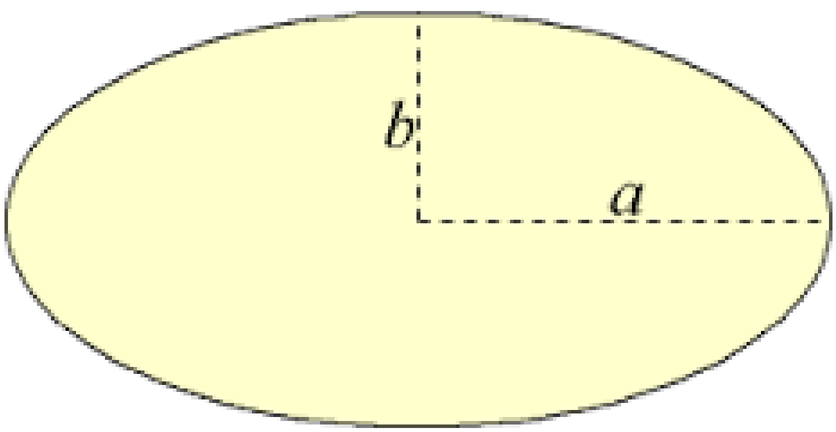
ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಭಾಗಗಳು (Parts of Ellipse):



- **ಹಿರಿನಡುಗೆರೆ (Major axis):** ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ನಡುವೆ ಹಾದುಹೊದ ಹಿರಿದಾದ ನಡುಗೆರೆ.

- **ಕಿರುನಡುಗೆರೆ (Minor axis):** ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ನಡುವೆ ಹಿರಿನಡುಗೆರೆಗೆ ನೇರಡ್ಡವಾಗಿ (Perpendicular) ಹಾದುಹೊದ ಕಿರಿದಾದ ನಡುಗೆರೆ.
- **ನಡು (Centre):** ಹಿರಿನಡುಗೆರೆ ಮತ್ತು ಕಿರುನಡುಗೆರೆಗಳು ಸರಿಪಾಲಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸುವೆಡೆಯಲ್ಲಿ ನಡು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ..
- **ತುದಿ (Vertex):** ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ನಡುವಿಂದ ಹಾದುಹೊದ ಹಿರಿನಡುಗೆರೆಯು ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ತುದಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.
- **ಒಡತುದಿ (Co-Vertex):** ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ನಡುವಿಂದ ಹಾದುಹೊದ ಕಿರುನಡುಗೆರೆಯು ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಒಡತುದಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.
- **ನೆಲೆಚುಕ್ಕೆ (Focus points):** ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಒಳಗೆ ಯಾವುದೇ ನೆಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಚುಕ್ಕೆ, ಉದ್ದದುಂಡುವಿನಲ್ಲಿ ಈ ನೆಲೆಚುಕ್ಕೆಗಳು ಹಿರಿನಡುಗೆರೆಯ (Major axis) ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ನಡುವಿನಿಂದ ಈ ಚುಕ್ಕೆಗಳು ಸರಿದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.
- **ತಿರುಗು ಚುಕ್ಕೆ (Locus Points):** ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಸುತ್ತ ಸುತ್ತುತ್ತಿರುವ ಯಾವುದೇ ಚುಕ್ಕೆ,
- **ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter)**

ನಾವು ಹಲವಾರು ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಆದರೆ ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಗಳು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಇವೆ.



ಸರಿಹೊಂದಿಕೆ 1:

ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter) $p = \pi(a+b)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{0.5}{n}^2 h^n$

- ಇಲ್ಲಿ **$h = (a - b)^2 / (a + b)^2$**
- ಇಲ್ಲಿ **a** ಅರೆ ಹಿರಿನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ (Semi Major axis line)
- ಇಲ್ಲಿ **b** ಅರೆ ಕಿರುನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ (Semi Minor axis line)
- **$\pi = 3.14159$.**

ಮೇಲಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$p = \pi(a+b)\left(1+\frac{1}{4}h+\frac{1}{64}h^2+\frac{1}{256}h^3+...\right)$$

ಮೇಲಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಎಲ್ಲೆಯಿಲ್ಲದ ಮೊತ್ತದ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆ (Infinite Sum formula) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು,ಇದು ಹೆಚ್ಚು ದಿಟವಾದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಸರಿಹೊಂದಿಕೆ 2:

ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು, ಇದನ್ನು ಎಣಿಕೆಯರಿಗ (Mathematician) ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ ಅವರು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದರು.

ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter) $p \approx \pi\left[3(a+b)-\sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$

- ಇಲ್ಲಿ **a** ಅರೆ ಹಿರಿನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ (Semi Major axis line)
- ಇಲ್ಲಿ **b** ಅರೆ ಕಿರುನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ (Semi Minor axis line)
- **π = 3.14159.**

ಸರಿಹೊಂದಿಕೆ 3:

ಈ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯು ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಹೆಚ್ಚು ದಿಟವಾದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter) $p = 2a\pi\left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i)!^2}{(2^i\cdot i!)^4}\cdot\frac{e^{2i}}{2i-1}\right)$

ಮೇಲಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು

ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter) $p = 2a\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{e^6}{5}-\dots\right]$

ಇಲ್ಲಿ $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ ಆಗಿದೆ

- ಇಲ್ಲಿ **a** ಅರೆ ಹಿರಿನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ (Semi Major axis line)
- ಇಲ್ಲಿ **b** ಅರೆ ಕಿರುನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ (Semi Minor axis line)
- **π = 3.14159.**

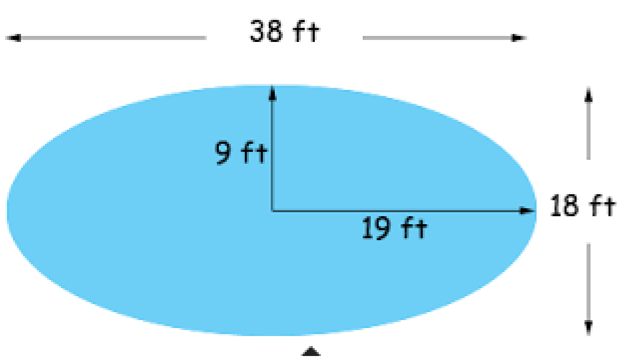
ಸರಿಹೊಂದಿಕೆ 4:

- ಅರೆ-ಹಿರಿನಡುಗೆರೆ (Semi Major axis) ಉದ್ದವು ಅರೆ-ಕಿರುನಡುಗೆರೆಯ (Semi Minor axis) ಮೂರುಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. i.e **a** < **3b,** ಈ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯು ಸುಲಭವಾಗಿ ಉದ್ದ ದುಂಡುವಿನ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅನುವುಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಇದು ಸುತ್ತಳತೆಯ ದಿಟಬೆಲೆಗಿಂತ **5%** ಹೆಚ್ಚು-ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter) $p \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

- ಇಲ್ಲಿ **a** ಅರೆ ಹಿರಿನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ (Semi Major axis line)
- ಇಲ್ಲಿ **b** ಅರೆ ಕಿರುನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ (Semi Minor axis line)
- **a** < **3b**
- **π = 3.14159.**
- e **a** < **3b**
- ಉದಾಹರಣೆಗೆ: b = 5, a = 10 => 10 < 3 x 5 => 10 < 15 ಆದಾಗ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೇಲಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : ಒಂದು ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಅರೆ-ಹಿರಿನಡುಗೆರೆಯು (Semi Major Axis) **19 ft** ಮತ್ತು ಅರೆ-ಕಿರುನಡುಗೆರೆಯು (Semi Minor Axis) **9 ft** ಆದಾಗ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು (Perimeter) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾರೂ ಒಂದು ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು, ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯ ಬಗೆ 2 ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಸುತ್ತಳತೆ (Perimeter) $p \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$

- ಇಲ್ಲಿ a = 19ft ಅರೆ ಹಿರಿನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ (Semi Major axis line)
- ಇಲ್ಲಿ b = 9 ft ಅರೆ ಕಿರುನಡುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ (Semi Minor axis line)
- π = 3.14159.
- ಸುತ್ತಳತೆ p = 14159 [3(19 + 9) – √(3 x 19 + 9)(19 + 3 x 9)]

p = 3.14159 [84 – √(66)(46)]

p = 3.14159 [84 -√3036]

p = 3.14159 [84 – 55.1] = 3.14159 x 28.9 = 90.791951 ft

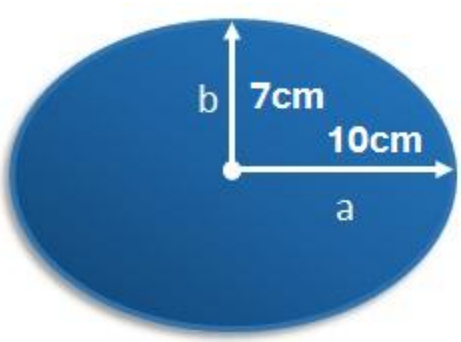
ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಸುತ್ತಳತೆ 90.791951 ft ಆಗಿದೆ

ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಹರವು(Area of an Ellipse):

ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಹರವನ್ನು A = πab ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಈ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

- ಉದಾಹರಣೆ : ಕೆಳಗಡೆ ಉದ್ದದುಂಡು ಆಕಾರದ ಸ್ನಾನ ಮಾಡಲು ಬಳಸುವ ಒಂದು ಸೋಪನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ, ಅದರ ಅರೆ ಹಿರಿನಡುಗೆರೆ (Semi Major axis line) a = 10cm ಮತ್ತು ಅರೆ ಕಿರುನಡುಗೆರೆ (Semi Minor axis line) b = 7cm ಆಗಿದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಉದ್ದದುಂಡು ಆಕಾರದ ಸೋಪಿನ ಮೇಲ್ಮೈಯ್ಯಿಯ ಹರವೆಷ್ಟು?



ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಹರವು A = πab.

$$A = 3.14159 \times 10 \times 7 = 219.911\ cm^2$$

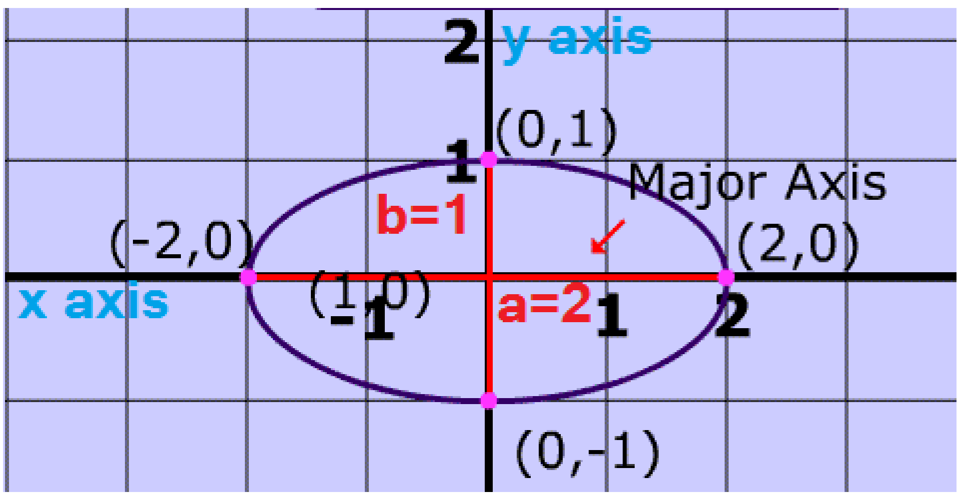
ಸೋಪಿನ ಮೇಲ್ಮೈಯ್ಯಿಯ ಉದ್ದದುಂಡು ಆಕಾರದ ಹರವು 219.911 cm^2 ಆಗಿದೆ.

ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆ (Equation of ellipse):

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಮುಚ್ಚಿದ ಆಕಾರವು ತನ್ನದೇ ಆದ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ, ಕೆಳಗಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯು ಉದ್ದದುಂಡು ಆಕಾರವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ಆಕಾರವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಲು ನಾವು ಚುಕ್ಕೆಗುರುತನ್ನು(Coordinate system) ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

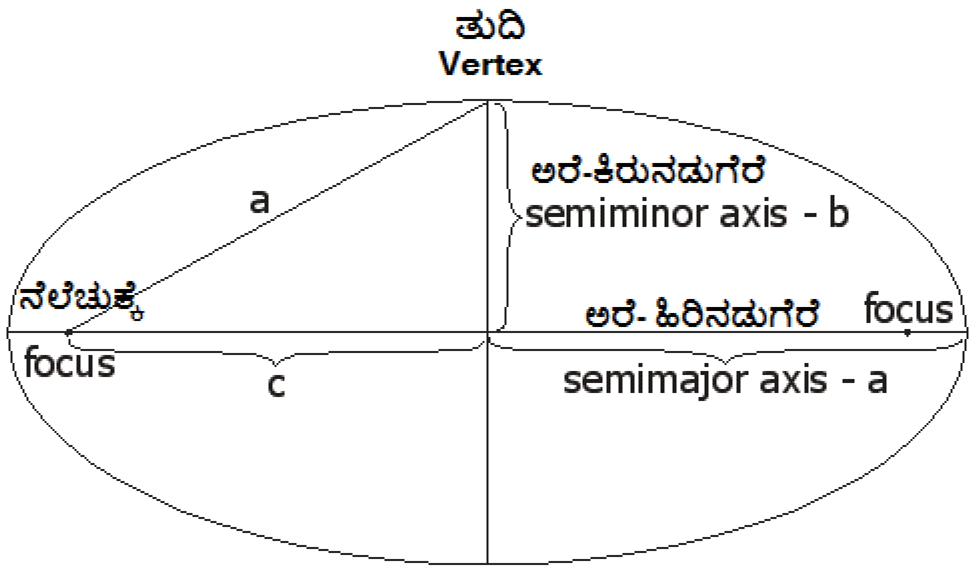
ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ಮೇಲಿನ ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.



- ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಅರೆ-ಹಿರಿನಡುಗೆರೆ (Semi Major axis line) a = 2 ಮತ್ತು ಅರೆ-ಕಿರುನಡುಗೆರೆ (Semi Minor axis line) b = 1 ಆಗಿದೆ.
- ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆದಾಗ $y = (1/a) \times \sqrt{(a^2 b^2 - x^2 b^2)}$ ಆಗುತ್ತದೆ.
- ಸರಿಹೊಂದಿಕೆಯಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಮಾರ್ಪುಕಗಳಾಗಿವೆ (Variables).
- ಚುಕ್ಕೆಗುರುತಿನ (Coordinates graph) ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ a=2, b=1 ಆದಾಗ x = [-2, -1, 0, 1, 2] ಬೆಲೆಗಳನ್ನು $y = (1/a) \times \sqrt{(a^2 b^2 - x^2 b^2)}$ ಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ y ನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ಉದ್ದದುಂಡುಕವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ದುಂಡುತನ (Eccentricity):

ಒಂದು ಬಾಗಿದ ಆಕೃತಿಯು (Curved shapes) ಎಷ್ಟು ದುಂಡಾಗಿದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ದುಂಡುತನ (Eccentricity) ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ, ಇದನ್ನು ನಡುಬೇರ್ಮೆಯಳತೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯಬಹುದು.



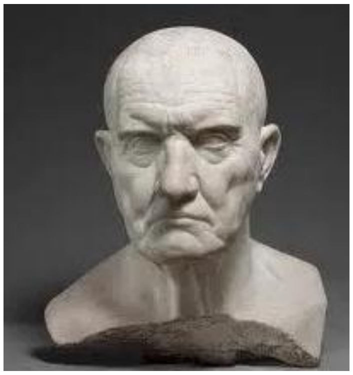
ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ದುಂಡುತನವನ್ನು (Eccentricity of the Ellipse) ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು,

e = c/a

- e ಎಂಬುವುದು ದುಂಡುತನದ ಗುರುತಾಗಿದೆ.
- c ಎಂಬುವುದು ನೆಲೆಚುಕ್ಕೆಯಿಂದ (Focus) ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ನಡುವಿಗೆ (Centre of the Ellipse) ಇರುವ ದೂರ
- a ಎಂಬುವುದು ನೆಲೆಚುಕ್ಕೆಯಿಂದ (Focus) ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ತುದಿಗೆ ಇರುವ, ಇಲ್ಲಿ ತುದಿಗೆ (Vertex) ಇರುವ ದೂರ.
- ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ: ದುಂಡುಕದಲ್ಲಿ (Circle) ದುಂಡುತನವು ಯಾವಾಗಲೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ (e = 0), ಆದರೆ ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ದುಂಡುತನವು ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಇದ್ದು, ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಕಮ್ಮಿ ಇರುತ್ತದೆ. 1 > e > 0.

ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಹಳಮೆ.

- **380–320 BCE** ಹೊತ್ತಿನ **ಮೆನಚ್ಮ್ಯಾಸ್ (Menaechmus)** ಎಂಬ ಗ್ರೀಕ್ ಎಣಿಕೆಯರಿಗ ಉದ್ದ ದುಂಡುವಿನ ಬಗ್ಗೆ ಅರಕೆಮಾಡಿದ್ದನು.



- ಸುಮಾರು **300 BCE** ಹೊತ್ತಿನ ಗ್ರೀಕ್ ಎಣಿಕೆಯರಿಗರಾದ **ಯೂಕ್ಲಿಡ್** ಮತ್ತು **ಅಪೋಲೊನಿಯಸ್** ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ಬಗ್ಗೆ ಹಲವಾರು ಅರಕೆಗಳನ್ನುಮಾಡಿದ್ದರು.
- **290 -.350 BCE** ಹೊತ್ತಿನ ಗ್ರೀಕ್ ಎಣಿಕೆಯರಿಗ **ಪಾಪಸ್ (Pappus)** ಉದ್ದದುಂಡುವಿನ ನೆಲೆಚುಕ್ಕೆಯ (Foci of the Ellipse) ಬಗ್ಗೆ ಅರಕೆ ಮಾಡಿದ್ದನು.
- 1602 CE ಯಲ್ಲಿ **ಜೋಹಾನ್ಸ್ ಕೆಪ್ಲರ್ (Johannes Kepler)** ನೇಸರನ ಸುತ್ತ ಸುತ್ತುವ ಮಂಗಳ ಗ್ರಹದ ಸುತ್ತುದಾರಿಯು (Orbit) ಉದ್ದದುಂಡು ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದ್ದನು.

ಚಟುವಟಿಕೆ:

1. ಮೊಟ್ಟೆಯಾಕಾರ (Oval shape) ಮತ್ತು ಉದ್ದದುಂಡು Ellipse shape) ಆಕಾರಕ್ಕೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿ.
2. ದುಂಡುಕದಲ್ಲಿ (Circle) ದುಂಡುತನವು (Eccentricity) ಏಕೆ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಿ.

ಸೆಲೆ: askiitians.com, mathsisfun.com, mathopenref.com/ellipseeccentricity, mathsisfun.com/geometry, Wikipedia

ನಲ್ಮೆಯ ಓದುಗರೇ,

ಅರಿಮೆ ಮಿಂದಾಣದಲ್ಲಿ ಮೂಡಿಬಂದಿದ್ದ ಆಯ್ದ ಬರಹಗಳ ಈ ಹೊತ್ತಗೆ ನಿಮಗೆ ಮೆಚ್ಚುಗೆಯಾಗಿರಬಹುದು.

ತಿಳಿಗನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಸಾಯನ್ಸ್ ಮತ್ತು ಟೆಕ್ನಾಲಜಿ ಬರಹಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ನಿಮಗೂ ಆಸಕ್ತಿಯಿದ್ದರೆ ಇಲ್ಲವೇ ಈ ಕುರಿತು ಬೇರೆಯೇನಾದರೂ ಅನಿಸಿಕೆ ತಿಳಿಸಬೇಕೆಂದರೆ ತಪ್ಪದೇ ಕೆಳಗಿನ ಮಿಂಚೆ ವಿಳಾಸಕ್ಕೆ ಓಲೆ ಬರೆಯಿರಿ.

arime.org@gmail.com

ಬನ್ನಿ, ಕನ್ನಡಿಗರ ನಾಳೆಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟುವತ್ತ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಹೆಜ್ಜೆ ಹಾಕೋಣ...